

# Магнетизм и магнитные наноматериалы

И.В. Бобкова

Не является учебным пособием, содержит лекционные заметки.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теорема Бора-ван Левен.</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Магнетизм атомов.</b>	<b>3</b>
2.1	Механический и магнитный момент электрона на атомной орбите. Классическое рассмотрение. . . . .	3
2.2	Механический и магнитный момент электрона на атомной орбите. Квантовое рассмотрение. . . . .	4
2.3	Опыт Штерна-Герлаха. Спин электрона. Собственный магнитный момент электрона. . . .	7
2.4	Электронные состояния в атомах. . . . .	9
2.4.1	Уровни энергии атома заданной электронной конфигурации. Правила Хунда. . . . .	10
2.5	Магнитный момент атома. Фактор Ланде. . .	11
<b>3</b>	<b>Классификация материалов по их магнитным свойствам.</b>	<b>15</b>
3.1	Диамагнетизм. . . . .	16
3.2	Парамагнетизм. . . . .	16
3.3	Магнетизм веществ с атомным порядком. . .	17

---

<b>4</b>	<b>Диамagnetизм систем слабозаимодействующих атомов или ионов.</b>	<b>21</b>
4.1	Классическое рассмотрение. . . . .	21
4.2	Квантовое рассмотрение. . . . .	23
4.3	Сравнение с экспериментом. . . . .	24
4.4	Парамагнетизм ван Флека. . . . .	26
<b>5</b>	<b>Парамагнетизм Ланжевена.</b>	<b>29</b>
5.1	Полуклассическое рассмотрение. . . . .	29
5.2	Квантовое рассмотрение. . . . .	31
5.3	Сравнение с экспериментом. Пары щелочных металлов. Соли редкоземельных элементов. .	34
<b>6</b>	<b>Магнетизм газа свободных электронов.</b>	<b>39</b>
6.1	Ферми-газ невзаимодействующих электронов.	39
6.1.1	Основное состояние электронного Ферми-газа. . . . .	39
6.1.2	Ферми-газ при конечных температурах.	44
6.2	Парамагнетизм Паули. . . . .	45
6.3	Диамagnetизм Ландау. . . . .	47
6.3.1	Квантование Ландау. . . . .	47
6.3.2	Диамagnetизм Ландау. . . . .	49
<b>7</b>	<b>Ферромагнетизм и антиферромагнетизм.</b>	<b>55</b>
7.1	Обменное взаимодействие . . . . .	55
7.1.1	Молекула водорода. . . . .	56
7.1.2	Гамильтониан Гайзенберга. . . . .	63
7.2	Модель Вейсса. Ферромагнетики. . . . .	67

7.3	Магнетизм коллективизированных электронов. Стонеровская неустойчивость. . . . .	73
7.4	Модель Вейсса. Антиферромагнетики. . . . .	81
7.5	Модель Вейсса. Ферримагнетики. . . . .	86
7.6	Магнетизм в рамках теории Ландау. . . . .	90
7.6.1	Магнетизм как спонтанное нарушение симметрии. . . . .	90
7.6.2	Теория фазовых переходов Ландау для ферромагнетизма. . . . .	91
7.6.3	Теория фазовых переходов Ландау для антиферромагнетизма. . . . .	94
7.7	Модель Гейзенберга за пределами приближения среднего поля. Магноны. . . . .	96
7.7.1	Модель Гейзенберга. Спиновые волны. . . . .	98
<b>8</b>	<b>Магнитная анизотропия. . . . .</b>	<b>107</b>
8.1	Магнитокристаллическая анизотропия. . . . .	108
8.1.1	Кубическая симметрия кристалла. . . . .	109
8.1.2	Тетрагональная и гексагональная симметрия кристалла. . . . .	112
8.1.3	Пример влияния магнитокристаллической анизотропии на поведение намагниченности: спин-флоп фаза. . . . .	115
8.2	Анизотропия формы. . . . .	117
8.3	Индукцированная магнитная анизотропия. . . . .	122
8.4	Магнитострикция. . . . .	123
8.5	Поверхностная анизотропия. . . . .	124
<b>9</b>	<b>Доменная структура магнетиков. . . . .</b>	<b>127</b>

---

9.1	Процесс намагничивания. . . . .	128
9.2	Доменные стенки. . . . .	132
9.2.1	Ширина доменной стенки. . . . .	133
9.3	Структура доменов. . . . .	135
9.3.1	Оценка ширины домена. . . . .	135
9.4	Реальная структура доменов. . . . .	138
<b>10</b>	<b>Динамика намагниченности.</b>	<b>147</b>
10.1	Уравнение Ландау - Лифшица - Гильберта. . .	147
10.2	Динамика намагниченности в постоянном внешнем поле. Переворот намагниченности приложенным полем. . . . .	151
10.3	Ферромагнитный резонанс. . . . .	152
10.3.1	Рассмотрение без учета диссипации энергии. . . . .	152
10.3.2	Учет диссипации энергии. . . . .	157
10.3.3	Учет размагничивающего поля (анизотропии формы). . . . .	159
10.3.4	Учет магнитокристаллической анизотропии. . . . .	160
10.4	Ферромагнитный резонанс. . . . .	163
10.5	Антиферромагнитный резонанс. . . . .	167
10.6	Спиновые волны. . . . .	172
10.6.1	Электродинамика плоских волн в магнитной среде. . . . .	172
10.6.2	Магнитостатические и обменные волны. . . . .	177
10.6.3	Спиновые волны в антиферромагнетике. . . . .	179

# Глава 1

## Теорема Бора-ван Левен.

В термодинамическом равновесии любой магнетизм не может быть объяснен в рамках классической механики и электродинамики, т.е. магнитный момент любого магнетика, рассматриваемого как классическая система движущихся зарядов, в термодинамическом равновесии равен нулю.

*Доказательство.*

Рассмотрим систему классических заряженных частиц. Магнитный момент системы  $\mu = -\partial H / \partial \mathbf{B}$ , где  $H$  - функция Гамильтона для системы. Средний магнитный момент системы можно вычислить как

$$\langle \mu \rangle = \frac{kT}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{B}}, \quad (1.1)$$

где  $Z = \sum_n g_n e^{-H/kT}$  - статистическая сумма системы, а  $g_n$  - стат. вес данного состояния. Действительно,

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{1}{kT} \frac{\sum_n g_n \frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}} e^{-H/kT}}{Z} Z = \frac{1}{kT} \langle \mu \rangle Z. \quad (1.2)$$

Далее наша цель состоит в доказательстве того, что  $Z$  не зависит от  $\mathbf{B}$ . Присутствующее в системе магнитное поле  $\mathbf{B}$ , как создаваемое самими зарядами, так и внешнее,

может быть описано векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ . При наличии векторного потенциала гамильтонова функция системы имеет вид

$$H = \sum_i \frac{(\mathbf{p}_i - \frac{e}{c}\mathbf{A}_i)^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (1.3)$$

Подставляя это выражение для гамильтоновой функции в выражение для  $Z$

$$Z = \sum_n g_n e^{-H/kT} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots e^{-U/kT} \times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots e^{-\frac{1}{kT} \sum_i \frac{(\mathbf{p}_i - (e/c)\mathbf{A}_i)^2}{2m_i}} \quad (1.4)$$

и делая в интеграле по импульсам замену переменных  $\mathbf{p}_i - (e/c)\mathbf{A}_i \rightarrow P_i$ , в силу того, что якобиан данного преобразования не зависит от импульса и пределы интегрирования не меняются, получаем, что  $Z$  не зависит от  $\mathbf{B}$ .

# Глава 2

## Магнетизм атомов.

### 2.1 Механический и магнитный момент электрона на атомной орбите. Классическое рассмотрение.

Если электрон движется по круговой орбите, то между его магнитным моментом и моментом количества движения существует определенное соотношение. Пусть  $\boldsymbol{\mu}$  - магнитный момент электрона, а  $\boldsymbol{J}$  - его момент количества движения. Вектор  $\boldsymbol{J}$  направлен перпендикулярно плоскости орбиты и равен по абсолютной величине

$$J = mvr. \quad (2.1)$$

Магнитный момент той же орбиты равен произведению тока на площадь орбиты (в системе СИ, в сгс надо поделить на скорость света). Ток  $I = q/(2\pi r/v)$ ,  $S = \pi r^2$ . Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu} = IS/c = qvr/2c. \quad (2.2)$$

Магнитный момент также направлен перпендикулярно плос-

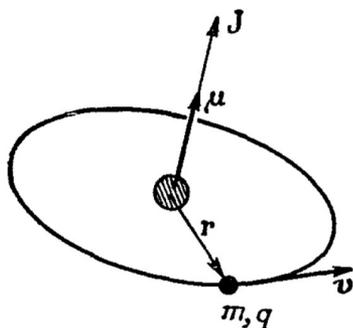


Рис. 2.1: Из книги [2]. Механический и магнитный моменты электрона, движущегося по круговой орбите.

кости орбиты. Из формул (2.1) и (2.2) можно получить

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2mc} \mathbf{J}. \quad (2.3)$$

Таким образом, отношение магнитного момента движущейся заряженной частицы к механическому не зависит ни от ее скорости, ни от радиуса орбиты. Вообще, отношение магнитного момента частицы к ее механическому моменту называется гиромагнитным отношением. Для электрона оно отрицательно, т.к. электрон имеет отрицательный заряд.

## 2.2 Механический и магнитный момент электрона на атомной орбите. Квантовое рассмотрение.

Если считать ядро атома бесконечно тяжелым, то гамильтониан атома с  $Z$  бесспиновыми электронами имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^Z \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_{i < j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|}. \quad (2.4)$$

## 2.2 Механический и магнитный момент электрона на атомной орбите. Квантовое рассмотрение. 5

В статическом магнитном поле  $\hat{p}_i \rightarrow \hat{p}_i - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)/c$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  - векторный потенциал магнитного поля. Если магнитное поле пространственно однородно, то векторный потенциал можно выбрать в виде  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (1/2)[\mathbf{B} \times \mathbf{r}]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 &= \hat{p}^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{A}\hat{p} + \hat{p}\mathbf{A}) + \frac{e^2}{c^2}A^2 = \\ &= \hat{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{B}\hat{l} + \frac{e^2}{4c^2}B^2r_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\hat{l} = \mathbf{r} \times \hat{p}$  - оператор момента импульса, а  $r_{\perp}$  - проекция  $\mathbf{r}$  на плоскость перпендикулярную  $\mathbf{B}$ . Тогда для системы  $Z$  электронов в атоме получаем

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{e}{2mc}\mathbf{B}\hat{L} + \frac{e^2}{8mc^2}B^2 \sum_{i=1}^Z r_{i\perp}^2, \quad (2.6)$$

где  $\hat{L} = \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \times \hat{p}_i$  - оператор полного момента импульса системы  $Z$  электронов. Для слабых магнитных полей вкладом третьего члена можно пренебречь и гамильтониан системы принимает вид  $\hat{H} = \hat{H}_0 - \mathbf{B}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^Z \mathbf{m}_i$  - полный магнитный момент системы электронов. Здесь магнитный момент отдельного электрона  $\mathbf{m}_i$  индуцируется его орбитальным моментом как

$$\mu_i = \frac{e}{2mc}\hat{l}_i. \quad (2.7)$$

Таким образом, гиромангнитное отношение при квантовом рассмотрении орбитального движения электрона в атоме получается точно таким-же, как и из элементарного классического рассмотрения.

Направим магнитное поле вдоль оси  $z$ . Тогда операторы  $H_0$ ,  $\hat{L}^2$  и  $L_z$  имеют общий набор собственных векторов

$|nLM\rangle$ , а собственные значения  $\hat{H}_0$ ,  $E_0^{nL}$  не зависят от  $M$  и  $(2L+1)$ -кратно вырождены. собственное значение оператора  $\hat{H}$ , отвечающее собственному вектору  $|nLM\rangle$  есть

$$E_{nLM} = E_0^{nL} - M\mu_B B, \quad (2.8)$$

где введено обозначение

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (2.9)$$

Эта величина называется магнетон Бора.

Т.к.  $M$  может принимать все целые значения от  $-L$  до  $L$ , то в магнитном поле уровень  $E_0^{nL}$  расщепляется на  $(2L+1)$  различных эквидистантных уровней (расщепляется в мультиплет, состоящий из  $(2L+1)$  подуровней). Расстояние между соседними подуровнями должно быть равно  $\mu_B B$  и не должно зависеть от конкретного атома. Расщепление уровней энергии атома в магнитном поле называется эффектом Зеемана.

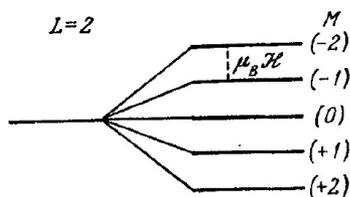


Рис. 2.2: Из книги [3]. Эффект Зеемана для  $L = 2$ . Слева вырожденный уровень энергии в нулевом поле, справа расщепление этого уровня в ненулевом магнитном поле.

Эксперимент лишь частично подтверждает эти предсказания. Есть 2 важных отклонения:

(1) в атомах с нечетным  $Z$  все мультиплеты четные, т.е. состоят из четного числа подуровней. Т.е. дело обстоит так, как будто  $L$  является полуцелым.

(2) расстояние между соседними подуровнями равно  $g\mu_B B$ , где  $g$  - множитель Ланде - зависит от конкретного мультиплета.

## 2.3 Опыт Штерна-Герлаха. Спин электрона. Собственный магнитный момент электрона.

Чтобы устранить вышеописанные затруднения, необходимо ввести полуцелые моменты импульса и гиромагнитное отношение, отличное от  $e/2mc$ . Это получается, если ввести гипотезу спина электрона, высказанную Уленбеком и Гоудсмитом в 1925 году: каждый электрон обладает внутренним моментом импульса или спином  $s = (1/2)\hbar$ , с которым связан магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \frac{e}{2mc} \mathbf{s}, \quad (2.10)$$

где  $g_s$  - некоторая константа. Согласие теории с экспериментом достигается при  $g_s = 2$ . Это значение  $g_s$  выводится из нерелятивистского приближения уравнения Дирака.

Существование полуцелого момента непосредственно устанавливается в эксперименте Штерна-Герлаха, в котором исследуется отклонение пучка атомов или молекул, имеющих магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  в неоднородном магнитном поле. Если поле неоднородно, то на центр масс атома действует сила  $\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu}\mathbf{B})$ . Если атом находится в состоянии с определенным  $\mu_z$  и градиент поля направлен вдоль оси  $z$ , см. рис. 2.3, то средняя сила, действующая на том есть  $\bar{F} = \mu_z dB/dz$ .

Пусть  $l$  - расстояние, проходимое атомом в магнитном поле,  $T$  - первоначальная кинетическая энергия атома. То-

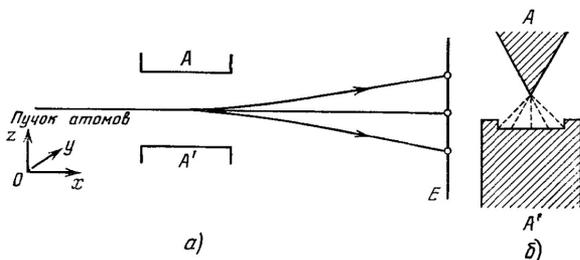


Рис. 2.3: Из книги [4]. Опыт Штерна-Герлаха. (а) Общая схема эксперимента. Неоднородное магнитное поле действует между полюсами магнита А и А' и направлено вертикально; (б) Поперечный разрез полюсов магнита, пунктиром указаны силовые линии магнитного поля.

гда скорость каждого атома отклоняется от своего начального направления на угол

$$\varphi \approx \mu_z \frac{dB_z}{dz} \frac{l}{2\Gamma}. \quad (2.11)$$

Отклонение пропорционально  $\mu_z$ . Если бы проекция  $\mu_z$  могла принимать произвольные значения, то на экране наблюдалось бы непрерывное пятно, вытянутое в направлении оси  $z$ . На самом деле на экране наблюдается ряд дискретных эквидистантных пятен. При изменении поля изменяется расстояние между пятнами, а общее число пятен  $\lambda$  остается неизменным. Таким образом, этот опыт является прямым доказательством квантования  $\mu_z$ . Более того, в опытах Штерна и Герлаха с пучками атомов серебра было получено расщепление на 2 отдельных пучка, что служит доказательством полуцелого значения момента импульса соответствующего атома.

**Краткое резюме о связи магнитного и механического момента электрона:**

Магнитный момент электрона складывается из 2 источ-

ников: орбитальный магнетизм (вследствие движения по орбите) и спиновый магнетизм.

Орбитальный магнитный момент электрона пропорционален моменту импульса электрона вследствие движения по орбите и есть

$$\boldsymbol{\mu}_l = g_l \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{l}, \quad (2.12)$$

где  $g_l = 1$  - фактор Ланде орбитального движения.

Спиновый магнитный момент электрона пропорционален собственному моменту импульса электрона (спину) и равен

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s}, \quad (2.13)$$

где  $g_s = 2$  - спиновый фактор Ланде.

## 2.4 Электронные состояния в атомах.

Магнитный момент атома складывается из магнитных моментов его электронной оболочки и магнитного момента ядра. Магнитный момент ядра, в свою очередь, складывается из магнитных моментов составляющих его нуклонов. Нуклоны (протоны и нейтроны) также обладают спином  $\hbar/2$  и имеют собственный магнитный момент  $\mu_p = g_p(e/2M_p c)s_p$  и  $\mu_n = g_n(e/2M_n c)s_n$ , соответственно.  $g_p \approx 5.59$  и  $g_n \approx -3.83$  - спиновые факторы Ланде протона и нейтрона. Хотя в некоторых эффектах ядерный магнетизм и играет важную роль, он значительно слабее электронного магнетизма (т.к. ядерный магнетон Бора  $\mu_{nuc} = (e\hbar/2M_p c) \approx \mu_B/1836.5$ ) и в большинстве магнитных материалов, наноструктур и эффектов роли не играет, поэтому мы сосредоточимся на магнетизме электронной оболочки атома. Для этого сначала рассмотрим как устроены электронные состояния в атоме.

### 2.4.1 Уровни энергии атома заданной электронной конфигурации. Правила Хунда.

Даже при заданной электронной конфигурации атом имеет несколько различных состояний. Как уже говорилось выше, электроны в атоме движутся в кулоновском поле ядра и взаимодействуют друг с другом. В нерелятивистском приближении это взаимодействие чисто электростатическое и не зависит от спина. Поле является центрально-симметричным, поэтому сохраняется полный орбитальный момент системы электронов  $L$ , а также полный спин системы электронов  $S$ . Таким образом вырождение каждого уровня есть  $(2L + 1)(2S + 1)$ .

При учете релятивистских эффектов, т.е. спин-орбитального взаимодействия  $H_{so} \propto \mathbf{L}\mathbf{S}$ , энергия атома начинает зависеть не только от величины  $L$  и  $S$  по отдельности, но и от их взаимной ориентации.  $L$  и  $S$  не сохраняются по отдельности, а сохраняется только полный момент атома  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ .  $J$  может принимать значения от  $|L - S|$  до  $L + S$ , т.е.  $2S + 1$  значений при  $L > S$  и  $2L + 1$  значений при  $L < S$ . В то же время спин-орбитальное взаимодействие обычно мало, поэтому из-за него уровень с заданными  $L$  и  $S$  обычно расщепляется на очень близкие подуровни, которые называются тонкой структурой уровня. Атомный уровень энергии (спектральный терм) обозначается латинской буквой S, P, D, F, G, H... по значению полного орбитального момента  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Слева сверху ставится число  $2S + 1$  - мультиплетность, справа снизу указывается  $J$ . Например,  ${}^2P_{3/2}$  - уровень атома  $L = 1, S = 1/2, J = 3/2$ .

Существуют эмпирически установленные правила Хунда, которые определяют состояние атома с наименьшей энергией (терм основного состояния) при заданной электронной конфигурации с учетом принципа Паули:

1. Для данной электронной конфигурации наименьшей энергией обладает состояние с наибольшим  $S$ .

2. Для этого  $S$  наименьшей энергией обладает терм с наибольшим  $L$ .

3. Для заданных  $L$  и  $S$  наименьшей энергией обладает состояние с минимально возможным  $J = |L - S|$ , если оболочка заполнена менее чем наполовину и с максимально возможным  $J = L + S$ , если оболочка заполнена более чем наполовину.

### Рассмотрим примеры.

Пользуясь правилами Хунда, определим терм основного состояния атомов С и N.

Углерод С. Электронная конфигурация  $2s^2 2p^2$ . Не полностью заполнена  $2p$ -оболочка. На ней 2 электрона. По первому правилу Хунда  $S = 1$ , по второму правилу Хунда  $L = 1$  ( $L_z = 1 + 0 = 1$ , эта проекция орбитального момента может соответствовать только  $L = 1$ , а не  $L = 2$ , т.к. действие повышающего оператора на данное состояние зануляет волновую функцию из-за принципа Паули). Оболочка заполнена менее чем наполовину, поэтому по третьему правилу Хунда  $J = |L - S| = 0$ . Терм основного состояния  $^3P_0$ .

Азот N. Электронная конфигурация  $2s^2 2p^3$ . Не полностью заполнена  $2p$ -оболочка. На ней 3 электрона. По первому правилу Хунда  $S = 3/2$ , по второму правилу Хунда  $L = 0$ . Оболочка заполнена ровно наполовину, поэтому  $J = |L - S| = L + S = 3/2$ . Терм основного состояния  $^4S_{3/2}$ .

## 2.5 Магнитный момент атома. Фактор Ланде.

Результирующий магнитный момент многоэлектронной оболочки атома  $\mu$  по направлению не будет строго противополо-

ложен полному орбитальному моменту  $J$  по причине того, что спиновое и орбитальное гиромагнитные отношения для электрона различны  $g_l \neq g_s$ . Это ясно из рис. 2.4, который представляет собой упрощенную векторную модель магнитного момента атома.

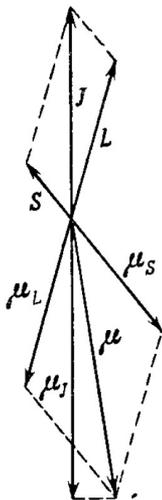


Рис. 2.4: Векторная модель магнитного момента атома.

Нас интересует только проекция  $\mu$  на вектор  $\mathbf{J}$  ( $\mu_J$ ), т.к. мы рассматриваем состояния с определенным значением углового момента.

$$\mu_J = \mu_S \cos(\mathbf{S}, \mathbf{J}) + \mu_L \cos(\mathbf{L}, \mathbf{J}). \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{S}, \mathbf{J}) &= \frac{S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)}{2\sqrt{S(S+1)J(J+1)}}, \\ \cos(\mathbf{L}, \mathbf{J}) &= \frac{L(L+1) + J(J+1) - S(S+1)}{2\sqrt{L(L+1)J(J+1)}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.14), а также учитывая, что  $\mu_L = \sqrt{L(L+1)}\mu_B$ ,  $\mu_S = 2\sqrt{S(S+1)}\mu_B$ , получим

$$\mu_J = \left[ 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right] \sqrt{J(J+1)}\mu_B = g_J \sqrt{J(J+1)}\mu_B, \quad (2.16)$$

где

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (2.17)$$

это фактор Ланде электронной оболочки. Если  $L = 0$  (чисто спиновый магнетизм), то  $g_J = 2$ . Если  $S = 0$  (чисто орбитальный магнетизм), то  $g_J = 1$ . При заданных  $L$  и  $S$  фактор меняется в пределах:

для  $L > S$ :

$$1 - \frac{S}{L - S + 1} \leq g_J \leq 1 + \frac{S}{L + S} \quad (2.18)$$

для  $L < S$ :

$$1 + \frac{S + 1}{S - L + 1} \geq g_J \geq 1 + \frac{S}{L + S}. \quad (2.19)$$

### **Квантовомеханический вывод фактора Ланде.**

Из соображений симметрии ясно что, т.к. при отсутствии внешнего магнитного поля единственный сохраняющийся в системе момент - это полный момент  $\mathbf{J}$ , то оператор магнитного момента в векторном смысле должен быть направлен вдоль  $\mathbf{J}$ . Поэтому можно написать

$$\hat{\mu} = \hat{G}\hat{\mathbf{J}}, \quad (2.20)$$

где  $\hat{G}$ -некоторый скалярный оператор. По определению магнитного момента как суммы орбитального и спинового моментов получим:

$$\hat{G}\hat{\mathbf{J}} = -\mu_B(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) = -\mu_B(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{S}}). \quad (2.21)$$

Домножая это равенство на  $\hat{\mathbf{J}}$ , получим:

$$\hat{G}\hat{\mathbf{J}}^2 = -\mu_B(\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{S}}) = -\mu_B(\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}}^2). \quad (2.22)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{S}}$  может быть выражен из соотношения:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}})^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + 2\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}}^2. \quad (2.23)$$

В результате из уравнения (2.22) можно выразить  $\hat{G}$  как

$$\hat{G} = -\mu_B \left( 1 + \frac{\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2}{2\hat{\mathbf{J}}^2} \right). \quad (2.24)$$

А в состоянии с заданными  $S$ ,  $L$  и  $J$  все операторы в этой формуле превращаются в свои собственные значения. Поэтому

$$\hat{\mu} = -\mu_B \left( 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \right) \hat{\mathbf{J}}. \quad (2.25)$$

Считая поле направленным по  $z$ , из формулы

$$\Delta E = -\langle \hat{\mu}_z \rangle B = g\mu_B m_J B, \quad (2.26)$$

где

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad (2.27)$$

фактор Ланде, а  $m_J$  - проекция полного момента на ось  $z$ .

# Глава 3

## Классификация материалов по их магнитным свойствам.

Феноменологическая классификация магнитных материалов производится по их магнитной восприимчивости. Для большинства магнитных материалов намагниченность  $M$  во внешнем поле  $H$  параллельна (или антипараллельна) полю и

$$M = \chi H, \quad (3.1)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость. В более общем случае намагниченность может зависеть от поля нелинейным образом, тогда можно ввести дифференциальную восприимчивость  $\chi(H) = dM/dH$ .

По различному поведению восприимчивости можно выделить три класса магнитных материалов:

- 1) диамагнетики;
- 2) парамагнетики;
- 3) вещества с атомным магнитным порядком, обуслов-

ленным обменным взаимодействием.

### 3.1 Диамагнетизм.

Диамагнетизм - это чисто индукционный эффект. Внешнее магнитное поле индуцирует в веществе магнитные диполи, которые ориентированы противоположно внешнему полю в соответствии с правилом Ленца. Поэтому диамагнитная восприимчивость отрицательна  $\chi^{dia} < 0$ .

Диамагнетизм - свойство всех материалов. Но проявляется он экспериментально только в отсутствие парамагнетизма и атомного магнитного порядка, которые гораздо сильнее и маскируют диамагнитные эффекты.

Примеры диамагнитных веществ:

- 1) многие органические соединения;
- 2) металлы типа Hg;
- 3) инертные газы;
- 4) сверхпроводники при  $T < T_c$ . Они являются идеальными диамагнетиками, т.к. для них внешнее магнитное поле экранируется веществом полностью (эффект Мейсснера-Оксенфельда). Т.е.  $\chi = -1$  и  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = 0$ .

### 3.2 Парамагнетизм.

Восприимчивость парамагнитных материалов положительна  $\chi^{para} > 0$ . Необходимым условием возникновения парамагнетизма является существование постоянных магнитных диполей (кроме поляризационного парамагнетизма Ван Флека). Во внешнем поле они ориентируются по полю. Эта ориентация частично разрушается тепловыми флуктуаци-

ями. Постоянные магнитные моменты могут создаваться локализованными моментами внутренних оболочек атома, либо коллективизированными электронами проводимости.

Типичными примерами веществ, где парамагнетизм создается локализованными моментами внутренних оболочек атомов являются редкоземельные металлы, где магнетизм создают  $4f$ -электроны внутренних оболочек и  $5f$ -электроны в актинидах. Этот класс материалов проявляет парамагнетизм Ланжевена, для которого характерно поведение восприимчивости, подчиняющееся закону Кюри

$$\chi^{Langevin}(T) = \frac{c}{T}. \quad (3.2)$$

Коллективизированные электроны проводимости тоже имеют постоянный магнитный момент  $\mu_B$  на электрон. Они также дают парамагнитный отклик материала на поле. Такой парамагнетизм называется парамагнетизмом Паули. соответствующая восприимчивость почти не зависит от температуры  $\partial\chi^{Pauli}/\partial T \approx 0$  и  $\chi^{Pauli} \ll \chi^{Langevin}$ .

### 3.3 Магнетизм веществ с атомным порядком.

Такой тип магнетизма обусловлен сильным обменным взаимодействием между атомными магнитными моментами и может быть объяснен только с помощью квантовой механики. Восприимчивость может сильно зависеть от температуры, внешнего поля и предыстории образца. Для таких материалов характерно наличие критической температуры, ниже которой материал проявляет спонтанную намагниченность, не вызванную внешним полем. Такой тип магнетизма может быть обусловлен как локализованными магнитными моментами (Gd, EuO, EuS), так и коллективизи-

рованными электронами (Fe, Ni, Co). Магнетизм веществ с атомным магнитным порядком можно грубо разделить на три подкласса:

1) Ферромагнетизм - существует спонтанная ненулевая намагниченность при  $0 < T < T_c$  благодаря преимущественной ориентации всех атомных магнитных моментов в одном направлении.  $T_c$  называется температурой Кюри.

2) Ферримагнетизм - кристаллическая решетка делится на 2 подрешетки А и В, в каждой из которых атомы выстраиваются в ферромагнитном порядке, но намагниченности этих подрешеток не равны друг другу  $M_A \neq M_B$  и  $M = M_A + M_B \neq 0$  при  $T < T_c$ .

3) Антиферромагнетизм - это специальный случай ферримагнетизма, для которого  $M_A = -M_B$  и, соответственно,  $M = M_A + M_B = 0$ , т.е. суммарная намагниченность отсутствует, но каждая из подрешеток обладает ненулевой спонтанной намагниченностью при  $T < T_N$ . В случае антиферромагнетизма критическая температура исчезновения спонтанного магнитного порядка  $T_N$  называется температурой Нееля.

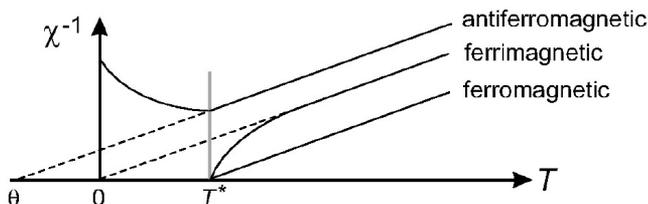


Рис. 3.1: Из книги [5]. Зависимость обратной магнитной восприимчивости от температуры для веществ с атомным магнитным порядком.

Выше критической температуры все материалы с атомным магнитным порядком проявляют парамагнитные свой-

### **3.3 Магнетизм веществ с атомным порядком. 19**

---

ства. Примерный вид зависимости магнитной восприимчивости от температуры для всех трех типов веществ с атомным порядком представлен на рис. 3.1.



# Глава 4

## Диамагнетизм систем слабовзаимодействующих атомов или ионов.

### 4.1 Классическое рассмотрение.

Предположим, что в месте расположения атома включается магнитное поле. По закону электромагнитной индукции Фарадея при изменении магнитного поля будет генерироваться вихревое электрическое поле, см. рис. 4.1.

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) \Rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (4.1)$$

Индукцированное электрическое поле, действуя на электрон, создает момент силы  $eEr$ , который должен быть равен скорости изменения момента импульса:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (4.2)$$

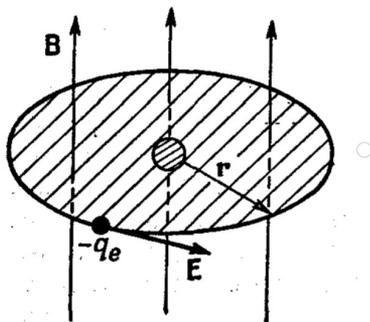


Рис. 4.1: Из книги [6]. Вихревое электрическое поле, индуцированное переменным магнитным полем, действующее на электрон в атоме.

Интегрируя Eq. (4.2) по времени, начиная от  $B = 0$  при  $t = 0$ , получим

$$\Delta J = -\frac{er^2}{2}B. \quad (4.3)$$

Такой дополнительный момент импульса сообщается электрону за счет включения поля. Наведенный магнитный момент получается умножением приобретенного орбитального момента на соответствующее орбитальному движению гиромагнитное отношение

$$\Delta\mu = \frac{e}{2m}\Delta J = -\frac{e^2r^2}{4m}B. \quad (4.4)$$

Знак минус означает, что индуцированный магнитный момент направлен против поля, а это и есть диамagnetизм. Восприимчивость равна:

$$\chi^{dia} = -\frac{e^2r^2\mu_0}{4m}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Квантовое рассмотрение.

Гамильтониан атома без учета спина электронов в магнитном поле имеет вид (2.6). При учете спина электрона появляется дополнительный член:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \mu_B(g_L\hat{\mathbf{L}} + g_s\hat{\mathbf{S}})\mathbf{B} + \frac{e^2}{8mc^2}B^2 \sum_{i=1}^Z r_{i\perp}^2, \quad (4.6)$$

где  $\hat{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^Z \hat{\mathbf{s}}_i$  - оператор полного спина электронов в атоме.

Рассмотрим атом, который обладает нулевыми орбитальным и спиновым моментом, т.е.  $L = S = 0$ . Тогда энергия атома, которая может быть вычислена как среднее значение оператора  $\hat{H}$  по данному квантовому состоянию, имеет вид:

$$E = E_0 + \frac{e^2}{8mc^2}B^2 \langle 0 | \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2) | 0 \rangle. \quad (4.7)$$

Здесь энергия считается по теории возмущений. Выражение (4.7) представляет собой результат расчета с точностью до первого порядка теории возмущений по магнитному полю, поэтому усреднение берется не по точному состоянию в магнитном поле, а по состоянию  $|0\rangle$ , которое отвечает нулевому полю.

Атомы и ионы с полностью заполненной оболочкой имеют сферически симметричную волновую функцию, поэтому  $\langle |x_i^2| \rangle = \langle |y_i^2| \rangle = (1/3)\langle |r_i^2| \rangle$ .

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{e^2 B^2}{12mc^2} \langle 0 | \sum_{i=1}^Z r_i^2 | 0 \rangle. \quad (4.8)$$

Магнитный момент единицы объема

$$M = -n \frac{\partial \Delta E}{\partial B} = -n \frac{e^2 B}{6mc^2} \langle 0 | \sum_{i=1}^Z r_i^2 | 0 \rangle, \quad (4.9)$$

где  $n$  - концентрация атомов.

$$\chi^{dia} = -n \frac{e^2}{6mc^2} \langle 0 | \sum_{i=1}^Z r_i^2 | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Это ларморовская диамagnetитная восприимчивость. Она не зависит от температуры, т.к. не зависит от температуры средний квадрат расстояния в данном состоянии, а другие состояния обычно достаточно сильно отделены от данного по энергии и энергии теплового движения окружающих частиц не хватает для переброса данного атома в другое состояние.

Эта диамagnetитная восприимчивость очень невелика и проявляется непосредственно в основном для атомов и ионов с полностью заполненными оболочками, хотя на самом деле присуща абсолютно всем атомам. Дело в том, что у атомов с частично заполненными оболочками есть постоянный магнитный момент, в силу чего они проявляют парамагнитные свойства. Поэтому диамagnetизм маскируется гораздо большим парамагнитным вкладом в восприимчивость. Но для тяжелых атомов, у которых полный спиновый момент не превышает нескольких магнетонов Бора, а диамagnetитные моменты всех электронов складываются, диамagnetитный вклад в восприимчивость может достигать до 10% от полной восприимчивости, что уже существенно.

### 4.3 Сравнение с экспериментом.

Если собственный магнитный момент атома равен нулю, то диамagnetизм электронной оболочки выступает на первый план. Это относится в первую очередь к инертным газам и к парам элементов второй группы, у которых основное состояние имеет конфигурацию  $^1S_0$ .

Восприимчивость, определенная формулой (4.10) является безразмерной величиной. Часто используют т.н. молярную восприимчивость, которая определяется формулой (4.10) с заменой концентрации атомов  $n$  на число Авогадро  $N_A$ . Эта величина, будучи умноженной на магнитное поле, дает магнитный момент моля вещества. Она уже не безразмерна и выражается в  $cm^3/mol$ . Сравнение молярных восприимчивостей инертных газов с расчетом приведено в таблице на рис. 4.2.

Элемент	He	Ne	Ar	Kr	Xe
$-\chi_a \cdot 10^6$ , эксперимент	1,9	6,7 ÷ 7,5	18 ÷ 19	28 ÷ 29	42 ÷ 44
$-\chi_a \cdot 10^6$ , расчёт	1,85	5,7	18,9	31,7	48,0

Рис. 4.2: Из книги [7]. Сравнение экспериментальных результатов по восприимчивости инертных газов с расчетами.

Отрицательные ионы галоидов и положительные ионы щелочных металлов имеют электронную оболочку, подобную оболочке инертных газов, поэтому можно ожидать, что их восприимчивости будут близки. Экспериментальные восприимчивости ионов приведены в таблице на рис. 4.3.

Восприимчивости соответствующих ионов и атомов действительно близки, но у ионов галоидов восприимчивость больше, а у ионов щелочных металлов меньше, чем у атомов инертных газов. Это связано с тем, что заряд ядра у галоидов меньше, а у ионов щелочных металлов больше, чем у атомов инертных газов, следовательно, радиусы орбит больше всего у галоидов и меньше всего у щелочных металлов.

Ион	$-\chi_{и} \cdot 10^6$	Атом	$-\chi_{а} \cdot 10^6$	Ион	$-\chi_{и} \cdot 10^6$
—	—	He	1,9	Li <sup>+</sup>	1,0
F <sup>-</sup>	9,1	Ne	7	Na <sup>+</sup>	6,8
Cl <sup>-</sup>	23,4	Ar	19	K <sup>+</sup>	14,9
Br <sup>-</sup>	35	Kr	28,5	Rb <sup>+</sup>	22,5
J <sup>-</sup>	50,6	Xe	43	Cs <sup>+</sup>	35,0

Рис. 4.3: Из книги [7]. Сравнение молярных восприимчивостей атомов и подобных ионов.

## 4.4 Парамагнетизм ван Флека.

Как видно из формулы (4.7) в случае нулевого суммарного момента  $J$  магнитный отклик атома определяется квадратичной по магнитному полю поправкой к энергии. Квадратичная поправка к энергии атома возникает не только в первом, но и во втором порядке теории возмущений и имеет вид:

$$\Delta E_{VF} = - \sum_n \frac{|\langle 0 | \mu_B \mathbf{B} (g_L \hat{\mathbf{L}} + g_s \hat{\mathbf{S}}) | n \rangle|^2}{E_n - E_0}. \quad (4.11)$$

Восприимчивость, происходящая от данной поправки к энергии, имеет вид

$$\chi_{VF} = -n \frac{d^2 E_{VF}}{dB^2} = 2\mu_B^2 \sum_n \frac{|\langle 0 | (g_L \hat{L}_z + g_s \hat{S}_z) | n \rangle|^2}{E_n - E_0}. \quad (4.12)$$

Очевидно, что  $\chi_{VF} > 0$  в силу того, что  $E_0$  - основное состояние системы, т.е. данная поправка приводит к парамагнитному отклику системы, который носит название парамагнетизм ван Флека. Парамагнетизм ван Флека проявляется в атомах, электронная оболочка которых заполнена на 1 электрон меньше, чем наполовину. Тогда  $L = S$

и в основном состоянии полный момент  $J = 0$  по третьему правилу Хунда. Поэтому линейная по полю поправка к энергии основного состояния отсутствует и парамагнетизм определяется вкладом ван Флека. В этом эффекте магнитный момент атома в нулевом поле равен нулю, он наводится внешним магнитным полем. В этом существенное отличие парамагнетизма ван Флека от ориентационного парамагнетизма, изучаемого далее, который возникает из-за ориентации уже существующих магнитных моментов электронной оболочки во внешнем поле и описывается линейной по полю поправкой к энергии атома.



# Глава 5

## Парамагнетизм Ланжевена.

### 5.1 Полуклассическое рассмотрение.

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , т.е.  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Энергия взаимодействия магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$ , направленного под углом  $\theta$  к оси  $z$  (точнее, находящегося в интервале углов от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ), с магнитным полем есть

$$E = -\mu B \cos \theta. \quad (5.1)$$

проекция магнитного момента на ось  $z$  равна  $\mu_z = \mu \cos \theta$ . Вероятность атому иметь магнитный момент в интервале углов от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  определяется произведением распределения Больцмана

$$P(\theta) = C e^{\mu B \cos \theta / kT}. \quad (5.2)$$

на долю состояний, в которых магнитный момент лежит в интервале углов от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ . Эта доля пропорциональна телесному углу, лежащему между конусами с растворами

$\theta$  и  $\theta + d\theta$ , т.е.  $2\pi \sin \theta d\theta / 4\pi$ :

$$dw = \frac{1}{2} \sin \theta e^{\mu B \cos \theta / kT}. \quad (5.3)$$

Поэтому среднее значение проекции магнитного момента на ось  $z$  равно

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\int \mu_z dw}{\int dw} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} \mu \cos \theta \sin \theta e^{\mu B \cos \theta / kT} d\theta}{\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta e^{\mu B \cos \theta / kT} d\theta}. \quad (5.4)$$

Введя обозначения  $\cos \theta = x$  и  $(\mu B)/(kT) = y$ , получим

$$\langle \mu_z \rangle = \mu \frac{\int_1^{-1} x e^{xy} dx}{\int_{-1}^1 e^{xy} dx} = \mu \left[ \coth y - \frac{1}{y} \right] = \mu L(y), \quad (5.5)$$

где  $L(y)$  - функция Ланжевена, которая изображена на рис. 5.1.

Предполагая, что внешнее магнитное поле мало или температура велика, т.е.  $y \ll 1$ , мы можем приближенно написать  $\coth y = 1/y + y/3 + O(y^3)$  и тогда

$$L(y) \approx \frac{y}{3}, \quad y \ll 1. \quad (5.6)$$

Пусть  $n$  - число магнитных моментов в единице объема, тогда намагниченность насыщения равна  $M_s = n\mu$ . Средняя намагниченность вдоль поля имеет вид

$$M = n \langle \mu_z \rangle. \quad (5.7)$$

При  $\mu B/kT \ll 1$

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\mu B}{3kT}, \quad (5.8)$$

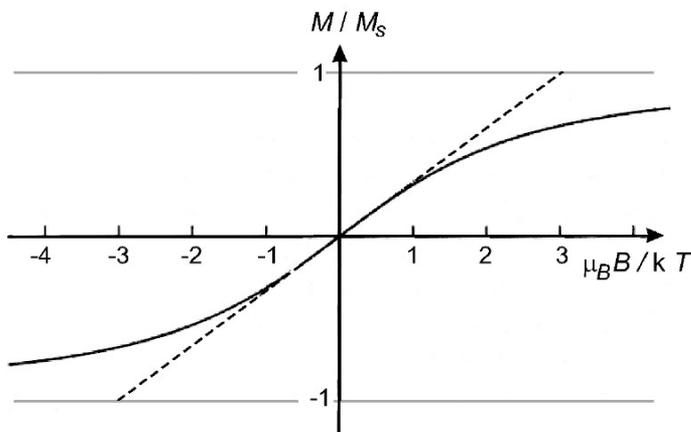


Рис. 5.1: Из книги [5]. Функция Ланжевена  $L(\mu B/kT)$ . Пунктирная линия - приближенное линейное поведение функции Ланжевена  $L(y) \approx y/3$  при  $y \ll 1$ .

откуда получаем восприимчивость

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 \mu^2 n}{3k} \frac{1}{T} = \frac{C}{T}. \quad (5.9)$$

Таким образом, парамагнитная восприимчивость газа невзаимодействующих атомов подчиняется закону Кюри.

## 5.2 Квантовое рассмотрение.

Для квантовомеханического расчета нужно учесть, что полный момент количества движения частицы  $J$  может иметь целые или полуцелые значения. Энергия магнитного момента в магнитном поле  $E = g_J m_J \mu_B B$ . Среднее значение проекции магнитного момента на ось магнитного поля можно вычислить как среднее по распределению Гиббса для состояний с определенными проекциями спина. Сначала найдем среднее значение проекции момента количества

движения:

$$\langle m_J \rangle = \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{-x m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{-x m_J}} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad (5.10)$$

где  $x = g_J \mu_B B / kT$ . Намагниченность единицы объема тогда можно выразить как:

$$M = -n g_J \mu_B \langle m_J \rangle. \quad (5.11)$$

Вычислим статистическую сумму:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{m_J=-J}^J e^{-x m_J} = e^{Jx} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-2Jx}) = \\ &= e^{Jx} \frac{1 - e^{-(2J+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{(2J+1)x/2} - e^{-(2J+1)x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \\ &= \frac{\sinh[(2J+1)x/2]}{\sinh[x/2]}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_s} &= \frac{n g_J \mu \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}}{n g_J \mu J} = \\ &= \left[ \frac{2J+1}{2J} \coth\left[\frac{2J+1}{2J} y\right] - \frac{1}{2J} \coth\left[\frac{y}{2J}\right] \right] = B_J(y), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $y = Jx = g_J J \mu_B B / kT$  и  $B_J(y)$  - функция Бриллюэна, которая изображена на рис. 5.2 для разных  $J$ .

Рассмотрим некоторые предельные случаи:

1.  $J \rightarrow \infty$ . В этом случае для малых  $x$   $\coth[y/2J] = \coth[x/2] \approx 2J/y + (1/3)(y/2J) + \dots$  для  $B_J(y)$  получаем

$$B_\infty(y) \approx \coth y - \frac{1}{y} - \frac{y}{12J^2} + \dots \approx L(y). \quad (5.14)$$

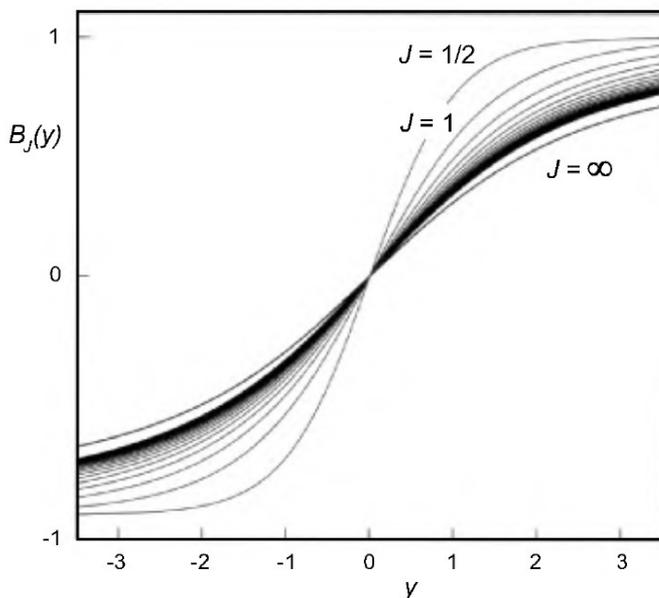


Рис. 5.2: Из книги [5]. Функция Бриллюэна для различных значений  $J$ .

Это означает, что  $J \rightarrow \infty$  отвечает классическому пределу.

2.  $J = 1/2$ . В этом случае

$$B_{1/2}(y) = \tanh y. \quad (5.15)$$

Теперь посмотрим на типичные экспериментальные значения  $J = 1/2$ ,  $g_J = 2$ ,  $B = 1\text{T}$ ,  $T = 300\text{K}$  и оценим характерное значение  $y$  для этих параметров  $y = \mu_B B/kT \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$ . Поэтому в большинстве экспериментальных ситуаций можно считать  $y \ll 1$  за исключением случаев очень больших полей или очень низких температур. В слу-

чае  $y \ll 1$  функцию Бриллюэна можно упростить

$$B_J(y) \approx \frac{2J+1}{2J} \left( \frac{2J}{2J+1} \frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{2J+1}{2J} y \right) - \frac{1}{2J} \left( \frac{2J}{y} + \frac{y}{6J} \right) = \frac{J+1}{3J} y. \quad (5.16)$$

Восприимчивость равна

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M_s B_J(y)}{B} = \frac{\mu_0 n g_J \mu_B J(J+1) g_J J \mu_B}{3JkT} = \frac{\mu_0 n g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3kT} = \frac{n \mu_0 \mu_{eff}^2}{3kT}. \quad (5.17)$$

Сравнивая выражение (5.17) с классическим ответом для восприимчивости (5.9), видим, что они совпадают с точностью до замены  $\mu \rightarrow \mu_{eff} = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$ . Обратите внимание, что при этом намагниченность насыщения достигается не умножением  $\mu_{eff}$  на число моментов в единице объема, а как  $M_s = n g_J \mu_B J$ .

### 5.3 Сравнение с экспериментом. Пары щелочных металлов. Соли редкоземельных элементов.

Число возможных веществ, где закон (5.17) реализуется, невелико, т.к. большинство газов имеют многоатомные молекулы. Одноатомны лишь инертные газы и пары металлов. Собственный магнитный момент атомов инертных газов равен нулю, поэтому доступными для наблюдения объектами являются лишь пары металлов.

Были проведены эксперименты с парами калия при  $T = 600 - 800\text{К}$ . Оказалось, что  $\chi_K = 0.38/T$  (на моль). Теоретическое значение, вычисленное по формуле (5.17), дает довольно хорошее согласие с экспериментом.

### 5.3 Сравнение с экспериментом. Пары щелочных металлов. Соли редкоземельных элементов. 35

Ион	Число 4f-электронов	Терм. основного состояния	$S$	$L$	$J$	$g$	$M/\mu_B$ по Хунду	$M/\mu_B$ по Ван-Флека	$M/\mu_B$ эксперим. значение
La <sup>3+</sup>	0	<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	0	0	0	—	0	0	0
Ce <sup>3+</sup>	1	<sup>2</sup> F <sub>5/2</sub>	1/2	3	5/2	6/7	2,54	2,56	2,4
Pr <sup>3+</sup>	2	<sup>3</sup> H <sub>4</sub>	1	5	4	4/5	3,58	3,62	3,5
Nd <sup>3+</sup>	3	<sup>4</sup> J <sub>9/2</sub>	3/2	6	9/2	8,11	3,62	3,68	3,5
Pm <sup>3+</sup>	4	<sup>5</sup> J <sub>4</sub>	2	6	4	3/5	2,68	2,83	—
Sm <sup>3+</sup>	5	<sup>6</sup> H <sub>5/2</sub>	5/2	5	5/2	2/7	0,84	1,6	1,5
Eu <sup>3+</sup>	6	<sup>7</sup> F <sub>0</sub>	3	3	0	—	0	3,45	3,6
Gd <sup>3+</sup>	7	<sup>8</sup> S <sub>7/2</sub>	7/2	0	7/2	2	7,94	7,94	8,0
Tb <sup>3+</sup>	8	<sup>7</sup> F <sub>6</sub>	3	3	6	3/2	9,72	9,7	9,5
Dy <sup>3+</sup>	9	<sup>6</sup> H <sub>15/2</sub>	5/2	5	15/2	4/3	10,65	10,6	10,7
Ho <sup>3+</sup>	10	<sup>5</sup> J <sub>8</sub>	2	6	8	5/4	10,61	10,6	10,3
Er <sup>3+</sup>	11	<sup>4</sup> J <sub>15/2</sub>	3/2	6	15/2	6/5	9,58	9,6	9,5
Tm <sup>3+</sup>	12	<sup>3</sup> H <sub>6</sub>	1	5	6	7/6	7,56	7,6	7,3
Yb <sup>3+</sup>	13	<sup>7</sup> F <sub>7/2</sub>	1/2	3	7/2	8/7	4,54	4,5	4,5
Lu <sup>3+</sup>	14	<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	0	0	0	—	0	0	0

Рис. 5.3: Из книги [7]. Эффективные магнитные моменты редкоземельных ионов, рассчитанные по формуле Хунда (5.17), формуле Ван-Флека (5.18) и экспериментальное значение.

Кроме паров металлов подходящими объектами, в которых можно наблюдать парамагнетизм Ланжевена, являются соли редкоземельных элементов. У редкоземельных элементов заполняется внутренняя 4f-оболочка, см. таблицу на рис. 5.3. Магнитный момент создается этой недозаполненной оболочкой и эта оболочка хорошо экранирована от влияния электрических полей соседних атомов заполненными 5s и 5p-оболочками. Поэтому соли редкоземельных элементов действительно можно считать газом независимых магнитных моментов.

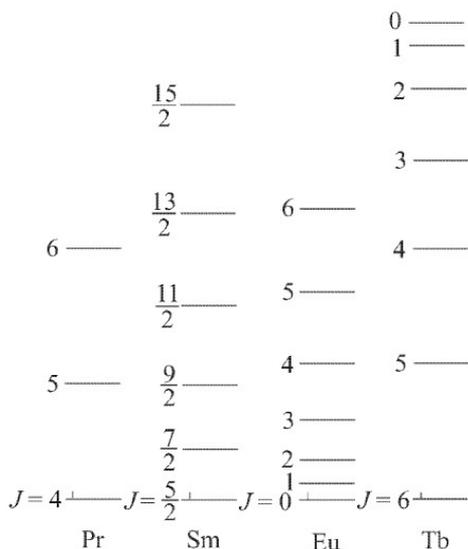


Рис. 5.4: Из книги [7]. Схемы энергетических уровней некоторых ионов редкоземельных элементов.

Из сравнения экспериментальных данных, приведенных в таблице на рис. 5.3 с расчетами по формуле Хунда (5.17) видно, что согласие в целом хорошее, кроме ионов  $Sm^{3+}$   $Eu^{3+}$ , для которых имеется большое расхождение. Это объясняется тем, что при выводе (5.17) предполагалось, что все ионы находятся в своем основном состоянии. Но у них есть и более высоколежащие термы (см. рис. 5.4), в которые часть ионов может переходить при конечных температурах в соответствии с распределением Больцмана  $e^{-\varepsilon/kT}$ . Как видно из рисунка, для самария и европия вероятность нахождения иона в возбужденных состояниях при комнатной температуре не мала, в отличие от остальных ионов, для которых возбужденные состояния отделены от основного большой энергетической щелью. Магнитная восприимчивость с учетом возбужденных состояний ионов может

быть рассчитана по формуле Ван Флека:

$$\chi = n \frac{\sum_J \left\{ g_J^2 \mu_B^2 J(J+1) / 3kT + b_J \right\} (2J+1) e^{-\varepsilon_J/kT}}{\sum_J (2J+1) e^{-\varepsilon_J/kT}}. \quad (5.18)$$

Тепловое возбуждение атомов и молекул является лишь одной из причин, приводящих к отклонениям от формулы Хунда (5.17). Из других причин можно отметить внутрикристаллический эффект Штарка, который сейчас будет кратко рассмотрен, электростатическое обменное взаимодействие электронов, которое в некоторых случаях приводит к ферромагнетизму и будет подробно рассмотрено позже и магнитное взаимодействие между магнитными моментами отдельных атомов, которое существенно только при очень низких температурах.

Кроме редкоземельных в периодической системе есть еще 4 группы элементов, в которых происходит дозаполнение внутренних оболочек. Это

1) группа железа от Sc(Z=21) до Ni(Z=28) - заполняется 3*d*-оболочка;

2) группа палладия от Y(Z=39) до Pd(Z=46) - заполняется 4*d*-оболочка;

3) группа платины от Lu(Z=71) до Pt(Z=78) - заполняется 5*d*-оболочка;

4) группа актинидов от Ra (Z=88) до Md (Z=101) - заполняется сначала 6*d*, а потом 5*f*-оболочка.

Переходными элементами называют группы железа, палладия и платины, у которых заполняются *d*-оболочки. Кажалось бы, что их магнитные свойства должны определяться магнитным моментом незаполненной *d*-оболочки и восприимчивость вычисляться по формулам Хунда или Ван-Флека. Но это не совсем так. Эффективный магнитный момент, рассчитанный по формуле Хунда для этих веществ,

согласуется с экспериментом только если основное состояние атома - S-состояние с нулевым орбитальным моментом. Для большинства переходных элементов расчет можно согласовать с экспериментом, если предположить, что в магнитном поле ориентируется только спин атома, восприимчивость вычисляется по формуле (формула Стонера)

$$\chi = n \frac{4S(S+1)\mu_B^2}{3kT}, \quad (5.19)$$

т.е. эффективный магнитный момент имеет чисто спиновую природу  $\mu_{eff} = 2\sqrt{S(S+1)}\mu_B$ . Орбитальный момент импульса закреплен и не участвует в ориентации магнитного момента по полю, а значит не дает вклада в восприимчивость. Закрепление орбитального момента возникает под влиянием электрического поля соседних ионов кристаллической решетки, которые снимают вырождение энергетических уровней по  $m_l$ . Т.е. некоторые значения  $m_l$  становятся более энергетически выгодными - кристаллический эффект Штарка. У ионов переходных элементов, в отличие от редкоземельных ионов, незаполненная d-оболочка находится снаружи, поэтому влияние кристаллического поля в их случае велико.

# Глава 6

## Магнетизм газа свободных электронов.

### 6.1 Ферми-газ невзаимодействующих электронов.

#### 6.1.1 Основное состояние электронного Ферми-газа.

Рассмотрим систему  $N$  невзаимодействующих электронов, находящихся в объеме  $V$ . Т.к. электроны не взаимодействуют, достаточно рассчитать энергетические уровни одного электрона и заполнить их электронами в соответствии с принципом Паули.

В отсутствие взаимодействия одноэлектронная волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = \varepsilon \psi(\mathbf{r}). \quad (6.1)$$

Движение электронов ограничено объемом  $V$  металла. При достаточно больших объемах естественно ожидать, что объ-

емные свойства электронного газа не будут зависеть от конкретной формы поверхности. Поэтому для простоты выберем образец в форме куба со стороной  $L = V^{1/3}$  и наложим периодические граничные условия

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z + L) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x, y + L, z) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x + L, y, z) &= \psi(x, y, z).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Решение уравнения Шредингера (6.1) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},\tag{6.3}$$

где нормировочный множитель  $1/\sqrt{V}$  выбран так, чтобы полная вероятность найти электрон где-либо в объеме  $V$  была равна единице  $\int dV |\psi(\mathbf{r})|^2 = 1$ . При этом  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Очевидно, что решение (6.3) представляет собой собственную функцию оператора импульса, отвечающую собственному числу  $\hbar\mathbf{k}$ . Поэтому это решение представляет собой состояние с определенным импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  и скоростью  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$ .

Волновая функция (6.3) удовлетворяет граничным условиям (6.2) только при выполнении соотношений

$$\begin{aligned}e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1 \Rightarrow \\ k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, k_z = \frac{2\pi n_z}{L},\end{aligned}\tag{6.4}$$

где  $n_x, n_y, n_z$  - целые числа. Таким образом, в  $\mathbf{k}$ -пространстве разрешены только такие волновые вектора, координаты которых по трем осям представляют собой целые кратные от  $2\pi/L$ , см. рис. 6.1. В трехмерном случае область объема  $\Omega$  в  $\mathbf{k}$ -пространстве содержит  $N_{k,V}$  точек:

$$N_{k,V} = \frac{\Omega}{(2\pi/L)^3} = \frac{\Omega V}{(2\pi)^3}.\tag{6.5}$$

## 6.1 Ферми-газ невзаимодействующих электронов 41

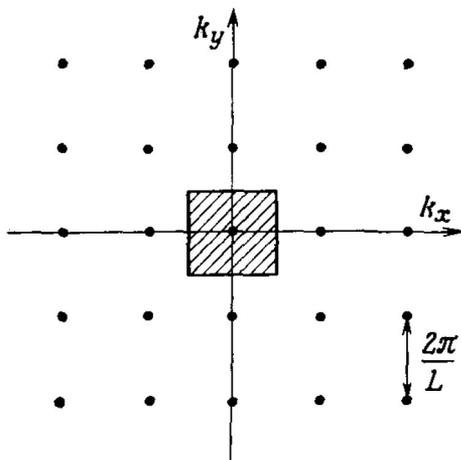


Рис. 6.1: Из книги [8]. Точки двумерного  $k$ -пространства, имеющие координаты  $k_x = 2\pi n_x/L$ ,  $k_y = 2\pi n_y/L$ . На одну точку приходится заштрихованный объем  $(2\pi/L)^2$ .

Плотность уровней в  $k$ -пространстве равна

$$N_k = \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (6.6)$$

Будем заполнять состояния в  $k$ -пространстве электронами с учетом принципа запрета Паули, т.е. в состояние с данным  $\mathbf{k}$  можно посадить не более 2 электронов с противоположными проекциями спина на ось квантования.  $N$ -электронное состояние представляет собой заполненную сферу в  $k$ -пространстве. Пусть радиус этой сферы  $k_F$ . Тогда внутри заполненной сферы есть

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3} \quad (6.7)$$

состояний, в каждое из которых можно посадить 2 электрона. Поэтому фермиевский радиус  $k_F$  связан с полным

числом электронов в системе соотношением

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} V. \quad (6.8)$$

Таким образом, если концентрация электронов в системе  $n$ , то основное состояние электронного газа получается путем заполнения всех одноэлектронных состояний вплоть до импульса Ферми  $p_F = \hbar k_F$ , который определяется из соотношения

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (6.9)$$

Состояния с импульсами выше  $p_F$  остаются незанятыми.

Сферу с радиусом  $k_F$ , внутри которой лежат заполненные электронные уровни, называют сферой Ферми, поверхность этой сферы - поверхностью Ферми.  $v_F = p_F/m$  и  $\varepsilon_F = p_F^2/2m$  - скорость Ферми и энергия Ферми, соответственно. Скорость Ферми является характерной скоростью электронов в металлах и является аналогом тепловой скорости  $v = \sqrt{3kT/m}$  в классических газах.

Порядок величины скорости Ферми  $10^8 \text{ sm/s}$ . Это довольно большая скорость, около 1% от скорости света. С точки зрения классической физики такие скорости электронов выглядят странно, ведь мы описываем состояние системы при  $T = 0$ , а при нулевой температуре в классическом газе все частицы имеют нулевые скорости. Даже при комнатной температуре характерные скорости классических частиц, имеющих массу электрона, всего около  $10^7 \text{ sm/s}$ .

Энергия ферми имеет порядок нескольких электрон-вольт.

Найдем энергию основного состояния Ферми газа. Для этого надо сложить энергии всех одноэлектронных уров-

## 6.1 Ферми-газ невзаимодействующих электронов 43

ней, находящихся внутри сферы Ферми:

$$E = 2 \sum_{k < k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Delta k = 2V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (6.10)$$

$$E = 2V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{V}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{V}{10\pi^2} \frac{\hbar^2}{m} k_F^5. \quad (6.11)$$

Энергия основного состояния в расчете на 1 электрон

$$\frac{E}{N} = \frac{1/(10\pi^2)(\hbar^2/m)k_F^5}{k_F^3/3\pi^2} = \frac{3}{5}\varepsilon_F = \frac{3}{5}kT_F. \quad (6.12)$$

В классическом электронном газе при  $T = 0$   $E/N = 0$ , а энергия  $(3/5)\varepsilon_F$  достигается при  $T \sim 10^4 K$ .

Заметим, что энергию Ферми газа мы считали как произведение энергии  $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  одного состояния с данным  $\mathbf{k}$  на число состояний в маленьком объеме  $k$ -пространства. Т.к. энергия  $\varepsilon_k$  зависит только от модуля  $k$ , то можно перейти к интегрированию по  $k$ , а значит и к интегрированию по энергии  $\varepsilon$ . Это делается так

$$\begin{aligned} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} &= \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = g(\varepsilon) d\varepsilon, \\ g(\varepsilon) &= \frac{m}{2\hbar^2 \pi^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} = \frac{3}{4} \frac{n}{\varepsilon_F} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_F} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Величина  $g(\varepsilon)$  называется энергетической плотностью состояний. С использованием плотности состояний выражение для энергии Ферми газа можно записать в виде

$$E = 2 \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon d\varepsilon g(\varepsilon). \quad (6.14)$$

### 6.1.2 Ферми-газ при конечных температурах.

Предыдущее рассмотрение справедливо при  $T = 0$ . При  $T > 0$  плотность состояний остается неизменной, а вероятность заселения уровней электронами (функция распределения) изменяется и выражается функцией Ферми

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}. \quad (6.15)$$

При  $T = 0$

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > \mu, \\ 1, & \varepsilon < \mu. \end{cases} \quad (6.16)$$

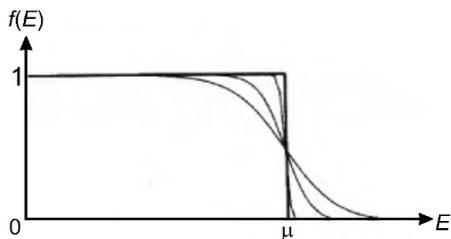


Рис. 6.2: Распределение Ферми.

Таким образом, при  $T = 0$   $\varepsilon_F = \mu$ . При ненулевых температурах ступенька в функции Ферми размывается, см. рис. 6.2. Ширина области температурного размывания  $\sim kT$ . Кроме того, при ненулевых температурах равенство  $\varepsilon_F = \mu$  нарушается. Энергия Ферми не зависит от температуры, это характеристика основного состояния Ферми газа, которая определяется только плотностью электронов. А химический потенциал зависит от температуры. При малых температурах эта зависимость имеет вид  $\mu = \varepsilon_F - (\pi^2/6)(kT)^2(g'(\varepsilon_F)/g(\varepsilon_F))$ , где  $g'(\varepsilon_F)$  - производная плотности состояний по энергии, взятая при энергии

Ферми. Порядок величины поправки к химпотенциалу при низких температурах  $\Delta\mu/\mu \sim (kT/\varepsilon_F)^2$ , что составляет примерно  $10^{-2}$  при комнатной температуре. При очень высоких температурах  $T > T_F$  химпотенциал становится отрицательным. При условии  $e^{-\mu/kT} \gg 1$  числа заполнения фермионных состояний  $f(\varepsilon)$  становятся малыми для любого положительного значения энергии и распределение Ферми-Дирака переходит в распределение Больцмана.

При ненулевых температурах энергия Ферми газа должна вычисляться с учетом функции распределения

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon). \quad (6.17)$$

Обратите внимание, что при  $T = 0$  выражение (6.17) переходит в (6.14).

## 6.2 Парамагнетизм Паули.

Вычислим магнитный момент Ферми-газа. Магнитный момент единицы объема можно посчитать как произведение магнитного момента одного электрона на разность концентраций электронов с магнитным моментом по полю и против него

$$M = \mu_B(n_{\uparrow} - n_{\downarrow}). \quad (6.18)$$

Концентрацию электронов  $n_{\uparrow, \downarrow}$  можно вычислить аналогично энергии Ферми газа через плотность состояний и функцию распределения

$$n_{\uparrow, \downarrow} = \int_0^{\infty} d\varepsilon g_{\uparrow, \downarrow}(\varepsilon) f(\varepsilon). \quad (6.19)$$

Далее надо учесть, что при наличии магнитного поля полная энергия электрона состоит не только из кинетической энергии  $\varepsilon_k = k^2/2m$ , но и потенциальной энергии  $\mp\mu_B B$ , т.е.  $\varepsilon_{\uparrow,\downarrow} = \varepsilon_k \mp \mu_B B$ . Поэтому плотность состояний теперь расщепляется по спину: для магнитного момента  $\uparrow$  опускается вниз на  $-\mu_B B$ , а для магнитного момента  $\downarrow$  поднимается вверх на такую же величину, см. рис. 6.3.

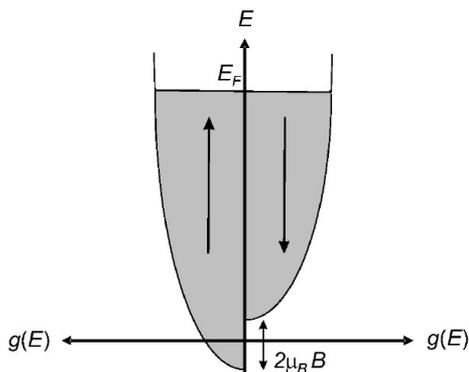


Рис. 6.3: Расщепление по спину плотности состояний для Ферми газа в магнитном поле.

Теперь плотность состояний  $g_{\uparrow,\downarrow}(\varepsilon) = g(\varepsilon \pm \mu_B B)$ , где  $g(\varepsilon)$  выражается формулой (6.13). При  $\mu_B B \ll kT$  можно написать  $g_{\uparrow,\downarrow}(\varepsilon) \approx g(\varepsilon) \pm \mu_B B g'(\varepsilon)$ . Тогда из (6.18) и (6.19) получим

$$M = 2\mu_B^2 B \int g'(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = -2\mu_B^2 B \int g(\varepsilon) f'(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (6.20)$$

При  $T \ll \varepsilon_F$   $f'(\varepsilon) \approx -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ . Поэтому

$$M = 2\mu_B^2 B g(\varepsilon_F). \quad (6.21)$$

Магнитная восприимчивость Ферми газа имеет вид

$$\chi^{Pauli} = \frac{\mu_0 M}{B} = 2\mu_0 \mu_B^2 g(\varepsilon_F) = \frac{3n\mu_0 \mu_B^2}{2\varepsilon_F}. \quad (6.22)$$

Этот результат очень слабо зависит от температуры и хорошо выполняется даже для комнатных температур. Температурная поправка к восприимчивости Паули опять имеет порядок величины  $(kT/\varepsilon_F)^2$ . Сравнивая выражение (6.22) с восприимчивостью Ланжевена  $\chi^{para} = n\mu^2/3kT$ , видим, что  $\chi^{Pauli}/\chi^{para} \sim kT/\varepsilon_F$ . Физическое объяснение этого факта состоит в том, что из-за принципа Паули в Ферми газе стремятся выстроиться по полю не все электроны, а только сидящие на расстоянии  $\sim kT$  от энергии Ферми, т.к. только там есть свободные места в плотности состояний с противоположным спином. Такие электроны проявляют стандартный парамагнетизм Ланжевена, но их доля всего  $kT/\varepsilon_F$ . Т.о. принцип Паули гораздо эффективнее температуры подавляет стремление электронов выстроиться по полю.

## 6.3 Диамагнетизм Ландау.

### 6.3.1 Квантование Ландау.

Рассмотрим газ невзаимодействующих электронов во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Тогда векторный потенциал такого поля можно выбрать в виде  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ . При наличии векторного потенциала оператор импульса электрона заменяется на  $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}$ . Гамильтониан электронного газа имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p}_x + \frac{eBy}{c} \right)^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + g\mu_B \hat{s}_z B. \quad (6.23)$$

Оператор  $\hat{s}_z$  коммутирует с гамильтонианом, т.е.  $[\hat{H}, \hat{s}_z] = 0$ , поэтому  $s_z$  сохраняется в данном состоянии и операторный член в гамильтониане  $-g\mu_B \hat{s}_z B$  можно заменить на число  $-g\mu_B s_z B$ , если мы рассматриваем только электронные состояния с определенным  $s_z = \pm 1/2$ . Тогда волновая

функция электрона  $\psi(\mathbf{r}, s_z)$  подчиняется уравнению Шредингера

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \hat{p}_x + \frac{eBy}{c} \right)^2 + p_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \psi + g\mu_B s_z B \psi = E\psi. \quad (6.24)$$

Т.к. гамильтониан не зависит от координат  $x, z$ , то по этим направлениям волновая функция имеет вид плоской волны и решение уравнения (6.24) можно искать в виде:

$$\psi = e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar} \varphi(y). \quad (6.25)$$

Подставляя (6.25) в (6.24), получим одномерное уравнение на функцию  $\varphi(y)$ , которое можно записать в виде:

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \left( E - g\mu_B s_z B - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{m}{2} \omega_B^2 (y - y_0)^2 \right] \varphi = 0, \quad (6.26)$$

где  $\omega_B = eB/mc$  - циклотронная частота и  $y_0 = -cp_x/(eB)$ . Уравнение (6.26) представляет собой уравнение гармонического осциллятора, поэтому энергии стационарных состояний этого уравнения имеют вид:

$$E_n = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) + g\mu_B s_z B + \frac{p_z^2}{2m} = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} + \frac{g}{2} s_z \right) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (6.27)$$

Соответствующие волновые функции стационарных состояний имеют вид:

$$\varphi_n = \frac{1}{\pi^{1/4} x_0^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{2x_0}\right) H_n\left(\frac{y - y_0}{x_0}\right), \quad (6.28)$$

где  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_B}$ . Из (6.28) видно, что  $y_0$  имеет смысл  $y$ -координаты центра классической окружности, по которой движется электрон в магнитном поле.

Данному уровню Ландау  $E_n$  отвечают любые значения  $p_x$ , таким образом формально уровень Ландау бесконечнократно вырожден. На самом деле, кратность вырождения уровней Ландау велика, но не бесконечна. Найдем ее. Пусть образец имеет размеры  $L_x$  и  $L_y$  в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Тогда число разрешенных значений  $x$ -компоненты импульса электрона, лежащих в интервале  $\Delta p_x$  имеет вид:

$$N_{p_x} = \frac{L_x \Delta p_x}{2\pi \hbar}. \quad (6.29)$$

$y$ -координата центра электронной орбиты должна попадать внутрь образца, поэтому  $0 < y_0 < L_y \implies \Delta p_x = eBL_y/c$ . Тогда из (6.29) получаем:

$$N_{p_x} = \frac{eB}{2\pi \hbar c} L_x L_y. \quad (6.30)$$

Также можно сосчитать число уровней Ландау, приходящихся на интервал значений  $z$ -компоненты импульса  $\Delta p_z$ :

$$N_{p_x, p_z} = \frac{eBL_x L_y}{2\pi \hbar c} \frac{L_z \Delta p_z}{2\pi \hbar} = \frac{eBV}{(2\pi \hbar)^2 c} \Delta p_z. \quad (6.31)$$

### 6.3.2 Диамагнетизм Ландау.

Как мы знаем, магнитный момент любой классической системы зарядов в равновесии равен нулю. В 1930 году Ландау показал, что у электронного газа диамагнитный момент возникает даже в случае статистики Больцмана. Дело здесь как раз в возникновении квантованных стационарных состояний электронного газа в магнитном поле, которые были рассмотрены в предыдущем разделе. Найдем этот диамагнитный момент.

В случае статистики Больцмана средний магнитный момент системы можно найти как

$$\langle \mu \rangle = \left[ \sum_l \mu_l g_l e^{-E_l/kT} \right] / \left[ \sum_l g_l e^{-E_l/kT} \right], \quad (6.32)$$

где  $\mu_l$  - магнитный момент системы в данном состоянии  $l$ ,  $g_l$  - число состояний с данной энергией  $E_l$ . С учетом того факта, что энергия системы в магнитном поле зависит от магнитного момента как  $E_l = E_{l,0} - \mu_l \mathbf{B}$ , можно написать, что

$$\langle \mu \rangle = kT \frac{dZ/d\mathbf{B}}{Z}, \quad (6.33)$$

где  $Z = \sum_l g_l \exp[-E_l/kT]$  - статистическая сумма системы. Тогда средний магнитный момент единицы объема системы есть

$$\mathbf{M} = nkT \frac{dZ/d\mathbf{B}}{Z}, \quad (6.34)$$

где  $n$  - концентрация электронов.

Найдем статистическую сумму для газа невзаимодействующих заряженных частиц, подчиняющихся статистике Больцмана:

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{2eBV}{(2\pi\hbar)^2 c} e^{-[\mu_B B(2\nu+1)/kT + p_z^2/2mkT]}. \quad (6.35)$$

Здесь использовано число уровней Ландау (6.31), приходящих на интервал значений  $z$ -компоненты импульса  $\Delta p_z$ . Происхождение множителя 2 связано с тем, что для свободных электронов  $g = 2$  и тогда спектр уровней Ландау имеет дополнительное двухкратное вырождение по спину электрона:  $E_n(s_z = 1/2) = E_{n+1}(s_z = -1/2)$ .

Вычисляя интеграл по  $p_z$  в (6.35), получим:

$$Z = \frac{2eBV}{(2\pi\hbar)^2c} \sqrt{2mkT\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\mu_B B(2\nu+1)/kT} = \quad (6.36)$$

$$\frac{eBV}{(2\pi\hbar)^2c} \sqrt{2mkT\pi} \frac{1}{\sinh[\mu_B B/kT]}. \quad (6.37)$$

Подставляя полученную статсумму в выражение (6.34), получим

$$M = -n\mu_B \left[ \coth \frac{\mu_B B}{kT} - \frac{kT}{\mu_B B} \right]. \quad (6.38)$$

Из формулы (6.38) следует, что при переходе к классическому пределу магнитный момент действительно исчезает, т.к. при  $\hbar \rightarrow 0$   $\mu_B \rightarrow 0 \implies M \rightarrow 0$ .

В случае  $\mu_B B/kT \ll 1$

$$\chi_{dia} = \frac{M}{B} = -\frac{n\mu_B^2}{3kT}. \quad (6.39)$$

При получении выражения (6.39) использовалась статистика Больцмана, т.е. не учитывался принцип запрета Паули. Можно строго получить правильное выражение для диамагнитной восприимчивости газа невзаимодействующих электронов с учетом принципа Паули, т.е. используя статистику Ферми-Дирака, но этот расчет вычислительно достаточно громоздкий и поэтому мы получим правильный ответ из качественных соображений. Точный расчет можно найти, например, в книге [11]. На самом деле все состояния вплоть до энергии Ферми в электронном газе заняты электронами. Поэтому магнитное поле не может изменить функции распределения электронов. Лишь в узкой полосе  $\sim kT$  вблизи энергии Ферми есть свободные состояния. Поэтому полученная нами формула должна быть применена только к этим электронам. По порядку величины количество таких

электронов в единице объема  $n' \sim nkT/E_F$ . Для получения точного ответа надо взять  $n' = 3nkT/2E_F$ . Подставляя это выражение для концентрации в (6.39), получим

$$\chi_{dia} = -\frac{n\mu_B^2}{2E_F}. \quad (6.40)$$

С учетом выражения (6.22) эту формулу можно переписать в виде:

$$\chi_{dia} = -\frac{1}{3}\chi_{Pauli}. \quad (6.41)$$

Таким образом, для газа свободных электронов парамагнетизм Паули всегда преобладает над диамагнетизмом Ландау и суммарный отклик газа на магнитное поле является парамагнитным. Однако, в реальных материалах это может быть не так. Дело в том, что при учете взаимодействия электрона с периодическим потенциалом решетки масса свободного электрона должна заменяться на эффективную массу  $m \rightarrow m^*$ . Это приводит к тому, что в выражении для диамагнитной восприимчивости (6.40)  $\mu_B \rightarrow \mu^* = e\hbar/2m^*c = (m/m^*)\mu_B$ . В выражении же (6.22) для парамагнитной восприимчивости Паули такую замену делать не надо, т.к. туда входит собственный (спиновый) момент электрона, не связанный с орбитальным движением. Поэтому итоговая восприимчивость электронного газа может быть записана как

$$\chi = \chi_{Pauli} + \chi_{dia} = \frac{n\mu_B^2}{2E_F} \left(3 - \frac{m^2}{m^{*2}}\right). \quad (6.42)$$

Этот результат позволяет объяснить отрицательную восприимчивость электронов проводимости некоторых металлов, таких как бериллий и висмут. Кроме того, ситуация, когда диамагнетизм Ландау преобладает над парамагнетизмом Паули, встречается в легированных полупроводниках, для которых  $m^* \ll m$  в примесной зоне. Тогда сначала измеряют восприимчивость чистого полупроводника

без примесей, которая связана с диамагнетизмом Ландау ионных остовов, а потом вычитают ее из восприимчивости легированного полупроводника. Полученная восприимчивость связана с восприимчивостью электронов проводимости в примесной зоне.

Большая часть металлов относится к переходным элементам, их магнитные свойства связаны с d- или f-оболочками. Металлы, имеющие полностью заполненные внутренние оболочки, называются простыми непереходными. Сюда относятся элементы I и II группы, Al, Ga, In и Tl из III группы, Sn и Pb из IV группы, As, Sb и Bi из V группы, Te, Po из VI группы. Их восприимчивость определяется диамагнитной восприимчивостью ионов и восприимчивостью электронов проводимости.

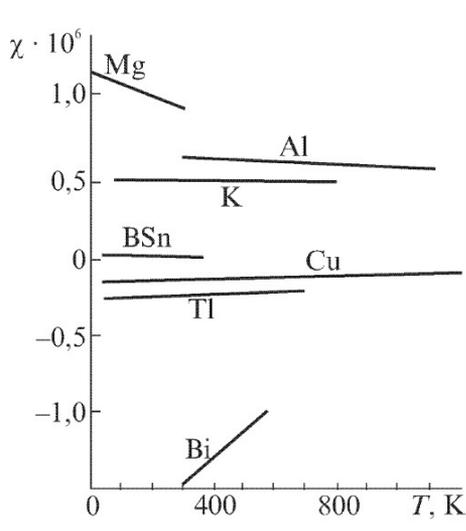


Рис. 6.4: Температурная зависимость восприимчивости некоторых металлов. Из книги [7].

Характерные значения и температурная зависимость восприимчивости некоторых металлов показаны на рис. 6.4.

Видно, что для большинства непреходных и даже некоторых переходных металлов температурная зависимость восприимчивости слаба, т.е. их поведение качественно описывается моделью свободных электронов. Количественное сравнение затруднено из-за вклада диамагнитной восприимчивости ионов, который можно определить только из косвенных данных.

# Глава 7

## Ферромагнетизм и антиферромагнетизм.

### 7.1 Обменное взаимодействие

Основной особенностью ферромагнетиков является наличие самопроизвольной намагниченности без приложения внешнего магнитного поля. Основные свойства ферромагнетиков удовлетворительно объясняются, если предположить, что существует некоторое взаимодействие, приводящее к выигрышу в энергии при параллельной ориентации спинов электронов. Энергия такого взаимодействия в расчете на одну частицу должна быть  $A_1 \sim 0.1$  эВ.

Простейшее предположение о природе этого взаимодействия - взаимодействие магнитных диполей - не подходит по количественным соображениям. Действительно, энергия такого взаимодействия  $\sim \mu_B^2/a_B^3 \sim 10^{-16} \text{erg} \sim 10^{-4} \text{эВ}$ .

Нам известны лишь два вида сил, играющих существенную роль в атомных явлениях - магнитные и электрические. Остается предположить, что взаимодействие между

спинами электронов в ферромагнетике обусловлено электрическими силами. Энергия электростатического взаимодействия электронов в атоме  $\sim e^2/a_B \sim 10^{-12} \text{erg} \sim 10^4 \text{эВ}$ . Даже небольшой ее части достаточно для достижения необходимого эффекта.

Кажется странным, что электростатическое взаимодействие может изменить магнитные свойства. Кроме того, известно, что в основном состоянии Ферми газа минимум энергии достигается когда электроны занимают все нижние энергетические уровни с противоположными спинами. Но в 1926 году Френкель и Гайзенберг независимо высказали предположение о том, что в определенных условиях минимум электростатической энергии будет достигаться для параллельной ориентации спинов электронов. Предложенная ими теория ферромагнетизма являлась обобщением простейшей задачи квантовой химии - задачи о свойствах молекулы водорода. Поэтому в следующем параграфе будет рассмотрена эта задача.

### 7.1.1 Молекула водорода.

Молекула водорода состоит из двух протонов и двух электронов. Обозначения всех расстояний между этими частицами в молекуле водорода приведены на рис. 7.1.

Ввиду большой массы ядер их можно считать неподвижными. Задача состоит в определении энергии системы в зависимости от расстояния между ядрами  $R$ . Уравнение Шредингера для всей молекулы имеет вид:

$$\left\{ \Delta_1 + \Delta_2 + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(R, r, r_{a_1}, r_{a_2}, r_{b_1}, r_{b_2})] \right\} \psi = 0, \quad (7.1)$$

где  $V = e^2/R + e^2/r - e^2/r_{a_1} - e^2/r_{a_2} - e^2/r_{b_1} - e^2/r_{b_2}$ ,  $\psi = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  зависит от координат обоих электронов.  $\Delta_{1,2} = \partial^2/\partial x_{1,2} + \partial^2/\partial y_{1,2} + \partial^2/\partial z_{1,2}$ .

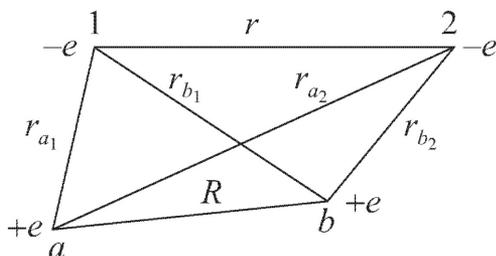


Рис. 7.1: Обозначение расстояний в молекуле водорода. Из книги [7].

Точно решить уравнение (7.1) нельзя, поэтому решим его приближенно. В качестве нулевого приближения выберем случай бесконечно удаленных ядер  $R = \infty$ . Тогда задача распадается на 2 задачи об атоме водорода. Пусть  $E_0$  - энергия самого нижнего уровня атома водорода. Предположим, что вблизи ядра  $a$  находится первый электрон, тогда волновая функция зависит только от координат первого электрона  $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . Волновая функция самого нижнего уровня подчиняется уравнению Шредингера:

$$\left[ \Delta_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_0 - \frac{e^2}{r_{a1}} \right) \right] \psi_a(q_1) = 0. \quad (7.2)$$

Для второго электрона, который находится вблизи ядра  $b$ , уравнение Шредингера принимает вид:

$$\left[ \Delta_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_0 - \frac{e^2}{r_{b2}} \right) \right] \psi_b(q_2) = 0. \quad (7.3)$$

Если рассматривать эти два отдельных атома как единую систему, то ее общая волновая функция  $\psi(q_1, q_2) = \psi_a(q_1)\psi_b(q_2)$ , а энергия  $E = 2E_0$ . Но возможно и такое состояние, когда вблизи ядра  $a$  находится второй электрон, а вблизи ядра  $b$  - первый. Волновая функция такого состояния  $\psi_b(q_1)\psi_a(q_2)$ ,

а энергия по-прежнему  $2E_0$ . В силу принципа суперпозиции произвольное состояние системы описывается волновой функцией вида

$$\psi_0 = \alpha\psi_a(q_1)\psi_b(q_2) + \beta\psi_b(q_1)\psi_a(q_2). \quad (7.4)$$

Будем считать функции  $\psi_{a,b}(q)$  нормированными, т.е.

$$\int dq |\psi_{a,b}(q)|^2 = 1. \quad (7.5)$$

Также будем считать их ортогональными, т.е.

$$\int dq \psi_a^*(q)\psi_b(q) = 0. \quad (7.6)$$

Предположение об ортогональности основано на том, что волновые функции  $\psi_{a,b}$  достаточно быстро убывают при удалении от ядра. При сближении ядер они начинают перекрываться, см. рис. 7.2 и условие ортогональности выполняется неточно, но эта поправка мала.

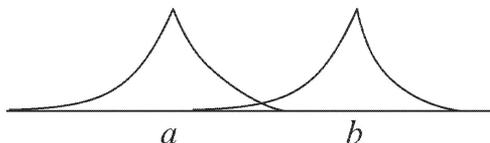


Рис. 7.2: Перекрывание волновых функций в молекуле водорода. Из книги [7].

Перейдем к рассмотрению первого приближения. При сближении ядер неучтенные в (7.2)-(7.3) члены потенциальной энергии взаимодействия электронов между собой и с ядрами приведут к изменению собственных значений энергии системы  $E = 2E_0 + E'$ . Подстановка волновой функции (7.4) и энергии  $2E_0 + E'$  в полное уравнение Шредингера

гера (7.1) приводит к

$$\alpha \left[ E' - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r_{b_1}} + \frac{e^2}{r_{a_2}} \right] \psi_a(q_1) \psi_b(q_2) + \\ \beta \left[ E' - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r_{a_1}} + \frac{e^2}{r_{b_2}} \right] \psi_a(q_2) \psi_b(q_1) = 0. \quad (7.7)$$

Умножив уравнение (7.7) на  $\psi_a^*(q_1) \psi_b^*(q_2)$  и проинтегрировав по  $q_{1,2}$ , а потом умножив это же уравнение (7.7) на  $\psi_a^*(q_2) \psi_b^*(q_1)$  и опять проинтегрировав по  $q_{1,2}$ , получим два алгебраических уравнения:

$$\alpha(E' - C) - \beta A = 0, \quad (7.8)$$

$$\alpha A - \beta(E' - C) = 0, \quad (7.9)$$

где

$$C = \frac{e^2}{R} + \int \left( \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r_{b_1}} - \frac{e^2}{r_{a_2}} \right) |\psi_a(q_1)|^2 |\psi_b(q_2)|^2 dq_1 dq_2 \quad (7.10)$$

это обычная электростатическая энергия взаимодействия, т.к.  $e|\psi(q)|^2$  выражает плотность электрического заряда в данной точке.

$$A = \int \left( \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r_{a_1}} - \frac{e^2}{r_{b_2}} \right) \psi_a^*(q_1) \psi_b(q_1) \psi_b^*(q_2) \psi_a(q_2) dq_1 dq_2 \quad (7.11)$$

не может быть истолкована также просто. Очевидно, что это тоже какая-то энергия электростатического взаимодействия, не имеющая классического аналога. Ее появление связано с неразличимостью электронов в квантовой механике. Величину  $A$  называют обменной энергией или обменным интегралом.

Нетривиальное решение системы (7.9) относительно  $\alpha$  и  $\beta$  возможно, если ее определитель равен нулю.

$$\det \begin{pmatrix} E' - C & -A \\ A & -(E' - C) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (7.12)$$

$$E' = C \pm A, \quad \alpha = \pm \beta. \quad (7.13)$$

Следовательно, решение уравнения Шредингера (7.1) в данном приближении имеет вид

$$\psi_0^{(1)} = \alpha [\psi_a(q_1)\psi_b(q_2) + \psi_a(q_2)\psi_b(q_1)], E^{(1)} = 2E_0 + C + A \quad (7.14)$$

$$\psi_0^{(2)} = \alpha [\psi_a(q_1)\psi_b(q_2) - \psi_a(q_2)\psi_b(q_1)], E^{(2)} = 2E_0 + C - A. \quad (7.15)$$

Вырожденное основное состояние нулевого приближения расщепляется на два. В зависимости от знака обменного интеграла энергетически более выгодным может быть любое из них.

При выводе мы не учитывали наличие у электрона спина и магнитного момента, а учитывали только электростатическое взаимодействие. Тем не менее, оказывается, что каждая из волновых функций (7.15) связана с определенным значением суммарного спина электронов. Полная волновая функция должна зависеть не только от координат, но и от спинов электронов. Пусть  $\sigma_{1,2}$  спиновые квантовые числа электронов, показывающие проекцию их спинов на ось квантования. Тогда полная волновая системы двух электронов есть

$$\psi(q_1, q_2, \sigma_1, \sigma_2) = \psi_0(q_1, q_2)\varphi(\sigma_1, \sigma_2). \quad (7.16)$$

Полная волновая функция электронов должна быть антисимметрична относительно попарной перестановки любых электронов, т.е. в нашем случае двух электронов менять знак при одновременной перестановке пространственных и спиновых координат электронов. Это требование есть следствие принципа неразличимости частиц в квантовой механике. Принцип Паули следует из него как частный случай, т.к. антисимметричная функция обращается в нуль при совпадающих координатах. Требование антисимметричности полной волновой функции приводит к тому, что при симметричной координатной волновой функции спиновая должна быть антисимметрична и наоборот.

Если суммарный спин двух электронов равен единице, то спиновая волновая функция будет симметричной. Если нулю, то антисимметричной. Поэтому состояние  $\psi_0^{(1)}$ , обладающее симметричной координатной волновой функцией, отвечает нулевому суммарному спину электронов, а решение  $\psi_0^{(2)}$ , волновая функция которого антисимметрична - суммарному спину равному единице. Таким образом, энергия молекулы водорода оказывается связанной со взаимным расположением спинов электронов в молекуле. В зависимости от знака обменного интеграла более выгодным может оказаться как суммарный спин нуль, так и суммарный спин единица. Следует еще раз подчеркнуть, что указанная разница в энергиях связана не с магнитным взаимодействием электронов, а с электростатическим.

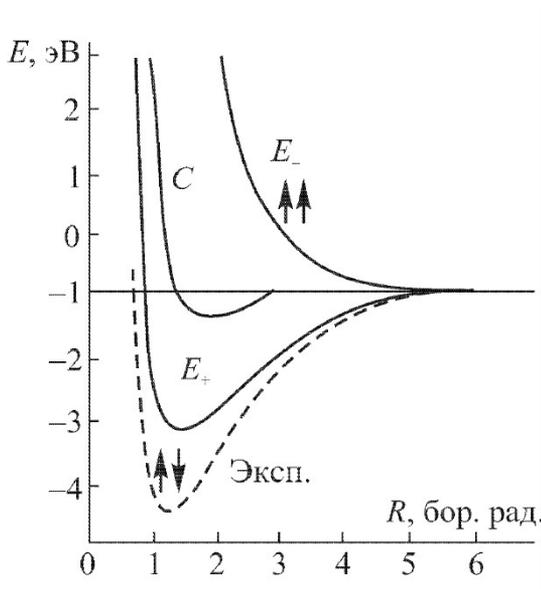


Рис. 7.3: Энергия взаимодействия двух атомов водорода. Из книги [7].

На рис. 7.3 приведены зависимости энергии молекулы

водорода от расстояния между ядрами, выраженного в боровских радиусах. Для молекулы водорода на расстояниях больших боровского радиуса  $A < 0$ , поэтому более выгодным оказывается состояние  $E^{(1)}$ , отвечающее нулевому суммарному спину электронов. Минимум этой энергии определяет равновесное расстояние между ядрами и энергию диссоциации молекулы. Для сравнения пунктуром показана экспериментальная зависимость энергии основного состояния от расстояния между ядрами. Прослеживается хорошее согласие с нашим упрощенным расчетом. При очень малых расстояниях между ядрами обменный интеграл меняет знак и более выгодным становится состояние с суммарным спином электронов 1. Но на практике для достижения этого состояния требуются слишком высокие давления.

Теперь будем рассматривать молекулу водорода как двухуровневую систему, т.е. предположим, что молекула может находиться только в состояниях  $E^{(1)} \equiv E_s$  и  $E^{(2)} \equiv E_t$ , все остальные возбужденные состояния молекулы находятся слишком высоко по энергии и она практически не может туда перейти. Напишем гамильтониан такой двухуровневой системы, действующий только на спиновые степени свободы электронов. Очевидно, что собственными состояниями такого гамильтониана будут состояния с суммарным спином  $S_{tot} = 0$  и суммарным спином  $S_{tot} = 1$  и при действии на состояние с  $S_{tot} = 0$  гамильтониан должен выдавать собственное значение  $E_s$ , а при действии на состояние с  $S_{tot} = 1$  -  $E_t$ . Будем искать гамильтониан в виде:

$$\hat{H}_{spin} = M_1 + M_2 \hat{s}_1 \hat{s}_2, \quad (7.17)$$

где  $M_{1,2}$  - константы, которые требуется найти, а  $\hat{s}_{1,2}$  - операторы спина первого и второго электронов.

Скалярное произведение  $\hat{s}_1 \hat{s}_2$  имеет определенное значение в состоянии с определенным суммарным спином двух

электронов. Найдем его.

$$\hat{s}_1 \hat{s}_2 = \frac{1}{2} [(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2]. \quad (7.18)$$

Беря среднее значение этого оператора по состоянию с определенным значением  $S_{tot}$ , получим:

$$\langle \hat{s}_1 \hat{s}_2 \rangle = \frac{1}{2} [S_{tot}(S_{tot} + 1) - 2s(s + 1)], \quad (7.19)$$

где  $s = 1/2$  - спин одного электрона. Из (7.19) получаем:

$$\begin{aligned} \langle \hat{s}_1 \hat{s}_2 \rangle &= -\frac{3}{4}, \quad S_{tot} = 0 \\ \langle \hat{s}_1 \hat{s}_2 \rangle &= \frac{1}{4}, \quad S_{tot} = 1. \end{aligned} \quad (7.20)$$

С учетом выражений (7.20) можно найти константы  $M_1$  и  $M_2$  из условий  $\langle S_{tot} = 0 | \hat{H} | S_{tot} = 0 \rangle = E_s$  и  $\langle S_{tot} = 1 | \hat{H} | S_{tot} = 1 \rangle = E_t$ :

$$\hat{H}_{spin} = \frac{1}{4}(E_s + 3E_t) - (E_s - E_t)\hat{s}_1 \hat{s}_2. \quad (7.21)$$

### 7.1.2 Гамильтониан Гайзенберга.

Первоначальные расчеты Гайзенберга являлись прямым обобщением задачи о молекуле водорода. Рассматривалась система, состоящая из  $N$  водородоподобных атомов, электроны которых находятся в S-состоянии. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha=1}^N \nabla_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha,i} g_i(q_{\alpha}) + \sum_{\alpha < \alpha'} V_{\alpha\alpha'}(|q_{\alpha} - q'_{\alpha}|), \quad (7.22)$$

где  $g_i(q_{\alpha})$  - энергия взаимодействия  $\alpha$ -го электрона с ядром  $i$ , а  $V_{\alpha\alpha'}(|q_{\alpha} - q'_{\alpha}|)$  - энергия взаимодействия электронов  $\alpha$  и  $\alpha'$  между собой.

Как и в случае молекулы водорода решение ведется методом последовательных приближений. В нулевом приближении рассматривают систему изолированных атомов. Уравнение Шредингера для каждого из них имеет вид:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\alpha^2 + g_i(q_\alpha) \right] \varphi_i(q_\alpha) = E_0 \varphi_i(q_\alpha). \quad (7.23)$$

Общее решение уравнения (7.23) представляется в виде линейной комбинации произведений функций  $\varphi_i(q_\alpha)$ . Его подстановка в (7.22) позволяет найти следующее приближение для энергии электронных состояний с учетом их взаимодействия. Суммарная энергия системы будет отличаться от энергии нулевого приближения на электростатическую энергию взаимодействия электронов и обменную энергию. Обменный интеграл для двух атомов  $i$  и  $j$  будет иметь вид:

$$A_{ij} = \int \varphi_i^*(q) \varphi_j^*(q') \varphi_i(q') \varphi_j(q) \times \\ \left[ V_{ij}(|q - q'|) + g_i(q') + g_j(q) \right] dq dq'. \quad (7.24)$$

Вклад в гамильтониан от суммарной энергии обменного взаимодействия имеет вид:

$$\hat{H}_{ex} = -2 \sum_{ij} A_{ij} \hat{s}_i \hat{s}_j. \quad (7.25)$$

Выражение (7.25) называется гамильтонианом Гейзенберга. Первоначальная теория Гейзенберга-Френкеля расчета обменных интегралов слишком груба, чтобы от нее можно было требовать количественного согласия с опытом. Однако из нее следует 2 важнейших принципиальных вывода: 1) если обменные интегралы положительны, то может возникнуть состояние со спонтанной намагниченностью - ферромагнетизм. 2) Величина энергии обменного взаимодействия достаточна для существования ферромагнетиков с температурой Кюри  $\sim 1000K$ .

Рассмотрим, при каких условиях обменный интеграл будет положительным. Энергия взаимодействия одноименных зарядов  $V_{ij}(|q - q'|) > 0$ , а энергия взаимодействия разноименных зарядов  $g_i(q)$  - отрицательна. Поэтому необходимо выполнение условия:

$$\left| \int \varphi_i^*(q) \varphi_j^*(q') \varphi_i(q') \varphi_j(q) V_{ij}(|q - q'|) dq dq' \right| > \left| \int \varphi_i^*(q) \varphi_j^*(q') \varphi_i(q') \varphi_j(q) [g_i(q') + g_j(q)] dq dq' \right|. \quad (7.26)$$

Выполнение этого условия зависит от вида волновых функций отдельного электрона  $\varphi_i(q)$ . Если волновые функции  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  велики вблизи ядер, то правая часть выражения (7.26) также велика, т.к.  $g_i$  имеет большие значения вблизи ядра. В этом случае условие положительности обменного интеграла не выполняется. Т.о. чтобы он был положителен, волновые функции вблизи ядер должны иметь меньшую величину. Этому условию удовлетворяют волновые функции квантовых состояний с большими орбитальными числами  $l$ . Разумеется, оболочка с большим значением  $l$  может содержать несколько электронов, но она не должна быть полностью заполнена, чтобы ее спиновый момент не был равен нулю. Этим требованиям удовлетворяют атомы переходных элементов.

Далее, волновые функции  $\varphi_i(q)$  достаточно быстро спадают с расстоянием, поэтому величина входящих в (7.26) в основном определяется величиной подинтегрального выражения в точке максимума произведения  $\varphi_i^*(q) \varphi_j^*(q') \varphi_i(q') \varphi_j(q)$ . Для того, чтобы обменный интеграл был положителен, этот максимум должен находиться подальше от ядер, т.е. атомы ферромагнитного вещества должны располагаться достаточно далеко друг от друга.

На практике все ферромагнитные элементы принадлежат к числу переходных. Ферромагнитные сплавы и соединения содержат в себе переходные элементы. Но лишь

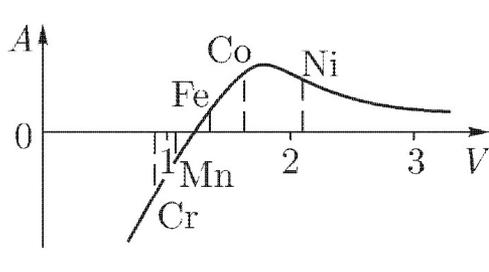


Рис. 7.4: Вычисленная Бете зависимость  $A(V)$  для  $d$ -состояния. Из книги [7].

немногие переходные элементы являются ферромагнетиками. Это объясняется тем, что только для небольшого числа элементов расстояние между атомами достаточно велико. Точнее, следует рассматривать отношение этого расстояния к диаметру внутренних орбит. Обозначим его  $V$ . У всех ферромагнитных элементов  $V > 1.5$ . На рис. 7.4 показана вычисленная Бете зависимость  $A(V)$ . Видно, что для хороших ферромагнетиков Fe, Co, Ni эти расчеты дают положительную величину обменного интеграла. У гадолиния и некоторых других редкоземельных элементов  $V$  уже слишком велико, поэтому обменный интеграл в них хоть и положителен, но мал и точки Кюри - низкие.

Марганец имеет слишком маленькое расстояние между атомами, но находится на границе с переменной знака обменного интеграла, поэтому небольшое увеличение постоянной решетки марганца должно превратить его в ферромагнетик. Действительно, добавление к марганцу небольших примесей азота приводит к появлению ферромагнетизма. Ферромагнитными являются также некоторые сплавы переходных элементов и интерметаллические соединения. Например, сплавы Mn-Cu-Al (сплавы Гейслера), соединения MnSb, MnBi обладают ферромагнитными свойствами.

Т.к. во всех случаях появления ферромагнетизма он

связан с переходными элементами, первоначальное рассмотрение Гейзенберга атомов с  $S$ -электронами является очень грубым приближением. Тем не менее, в большинстве переходных металлов магнетизм обусловлен только спиновыми степенями свободы в силу кристаллического эффекта Штарка, который приводит к расщеплению электронных состояний по проекции орбитального момента. В результате этого орбитальный момент замораживается, т.е. орбитальные моменты отдельных ионов не имеют возможности переориентироваться. Кроме того, надо учесть, что многие ферромагнетики являются металлами, что приводит к необходимости рассматривать магнетизм электронов проводимости и взаимодействие  $s$ - и  $d$ -электронов.

## 7.2 Модель Вейсса. Ферромагнетики.

Ферромагнетизм характеризуется наличием спонтанной намагниченности даже без приложения внешнего поля. Описывающая магнетизм часть гамильтониана ферромагнетика с учетом внешнего поля имеет вид:

$$\hat{H} = - \sum_{ij} J_{ij} \hat{S}_i \hat{S}_j + g_J \mu_B \sum_i \hat{S}_i B, \quad (7.27)$$

где  $\hat{S}_i$  - оператор спина, локализованного на данном узле. Абсолютная величина спина  $S$ . Обменный интеграл  $J_{ij} > 0$  и отличен от нуля только для ближайших соседей. Начнем с приближения, известного как модель Вейсса: взаимодействие магнитного иона с соседями описывается как появление некоторого эффективного поля  $B_{mf}$ , действующего на него:

$$\hat{H} = g_J \mu_B \sum_i \hat{S}_i (B + B_{mf}), \quad B_{mf} = \lambda M. \quad (7.28)$$

Найдем связь  $\mathbf{B}_{mf}$  с обменным интегралом  $J_{ij} = J_{ex}$ :

$$-\sum_{ij} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j = -\sum_i (J_{ex} \sum_j \hat{\mathbf{S}}_j) \hat{\mathbf{S}}_i. \quad (7.29)$$

Далее операторная сумма в круглых скобках в (7.29) заменяется на ее среднее значение, т.е. классическое выражение. Тогда обменный вклад в гамильтониан для  $i$ -ого электрона можно записать как:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i,mf} &= -g_J \mu_B \hat{\mathbf{S}}_i \frac{J_{ex} \sum_j g_J \mu_B \mathbf{S}_j}{g_J^2 \mu_B^2} = g_J \mu_B \hat{\mathbf{S}}_i \frac{J_{ex} Z \langle \mu_j \rangle}{g_J^2 \mu_B^2} = \\ &= g_J \mu_B \hat{\mathbf{S}}_i \frac{J_{ex} Z M}{n g_J^2 \mu_B^2} = g_J \mu_B \hat{\mathbf{S}}_i \mathbf{B}_{mf}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где  $Z$  - число ближайших соседей иона  $i$ . Из (7.30) можно найти значение эффективного поля

$$\mathbf{B}_{mf} = \frac{J_{ex} Z M}{n g_J^2 \mu_B^2} = \lambda M, \quad \lambda = \frac{J_{ex} Z}{n g_J^2 \mu_B^2}. \quad (7.31)$$

В модели Вейсса мы имеем ситуацию, аналогичную парамагнетику в поле  $\mathbf{B} + \mathbf{B}_{mf}$ . Поэтому, согласно формуле (5.13), намагниченность ферромагнетика подчиняется уравнению

$$\frac{M}{M_s} = B_J(y), \quad (7.32)$$

где

$$B_J(y) = \frac{2J+1}{2J} \coth \left[ \frac{2J+1}{2J} y \right] - \frac{1}{2J} \coth \left[ \frac{y}{2J} \right], \quad (7.33)$$

$$y = \frac{g_J \mu_B J (B + \lambda M)}{kT}. \quad (7.34)$$

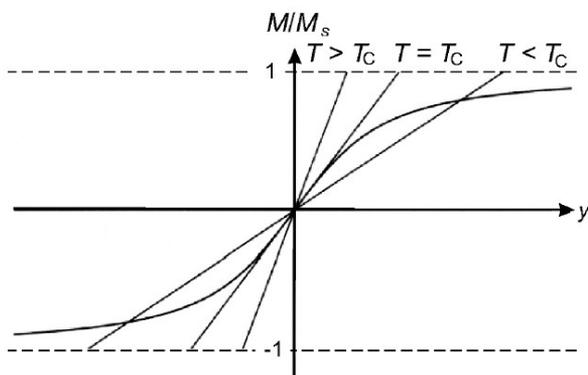


Рис. 7.5: Графическое решение уравнения (7.32) при  $B = 0$ . Из книги [5].

При отсутствии внешнего поля  $B = 0$  намагниченность подчиняется уравнению (7.32), в котором  $y = g_J \mu_B J \lambda M / (kT)$ . Графическое решение этого уравнения представлено на рис. 7.5. Оно представляется точками пересечения функции Бриллюэна и прямой  $M/M_s = (kT/g_J \mu_B J \lambda M_s) y$ . Решение  $M = 0$  существует всегда. Кроме него при достаточно малых наклонах прямой  $M/M_s = (kT/g_J \mu_B J \lambda M_s) y$  существует еще и 2 ненулевых решения для намагниченности, которые равны по модулю, но имеют противоположные знаки. Коэффициент наклона прямой определяется температурой, поэтому ненулевое решение, т.е. спонтанная намагниченность существует ниже некоторой критической температуры  $T_c$  - температуры Кюри. Найдем ее. Очевидно, что температура Кюри определяется таким наклоном прямой, который совпадает с наклоном функции Бриллюэна при  $y = 0$ . Поэтому для ее нахождения надо решить уравнение

$$\frac{d(M/M_s)}{dy} = \left. \frac{dB_J(y)}{dy} \right|_{y=0}. \quad (7.35)$$

Т.к.  $B_J(y) \approx [(J+1)/3J]y$  при  $y \rightarrow 0$ , то из (7.35) получим

$$T_c = \frac{(J+1)g_J\mu_B\lambda M_s}{3k}. \quad (7.36)$$

Используя выражения для намагниченности насыщения  $M_s = ng_J\mu_B J$  и эффективного магнитного момента  $\mu_{eff} = g_J\mu_B\sqrt{J(J+1)}$ , формулу для критической температуры можно переписать в виде

$$T_c = \frac{n\lambda\mu_{eff}^2}{3k}. \quad (7.37)$$

Молекулярное (эффективное) поле Вейсса можно оценить через критическую температуру:

$$B_{mf} = \lambda M_s = \frac{3kT_c}{g_J\mu_B(J+1)}. \quad (7.38)$$

Используя типичные значения  $J = 1/2$ ,  $T_c = 10^3 K$ , получим  $B_{mf} = 1500 \text{Тл}$ . Это очень высокое магнитное поле, наглядно свидетельствующее о силе обменного взаимодействия между спинами.

Результат численного решения уравнения (7.32) при отсутствии внешнего поля показан на рис. 7.6. Аналитически можно найти поведение намагниченности вблизи критической температуры и вблизи нулевой температуры. Сделаем это. Сначала рассмотрим  $M(T)$  при  $T \rightarrow T_c$ . При этом  $M \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0$ . Разложение функции Бриллюэна при маленьких значениях  $y$  имеет вид:

$$B_J(y) = \frac{J+1}{3J}y - \frac{(J+1)(2J^2+2J+1)}{90J^3}y^3. \quad (7.39)$$

Подставляя в (7.39)  $y = (3J/J+1)(M/M_s)(T_c/T)$ , из (7.32) получаем следующее уравнение для нахождения намагниченности:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{M}{M_s} \frac{T_c}{T} \left( 1 - \left( \frac{M}{M_s} \right)^2 \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \frac{3(2J^2+2J+1)}{10(J+1)^2} \right), \quad (7.40)$$

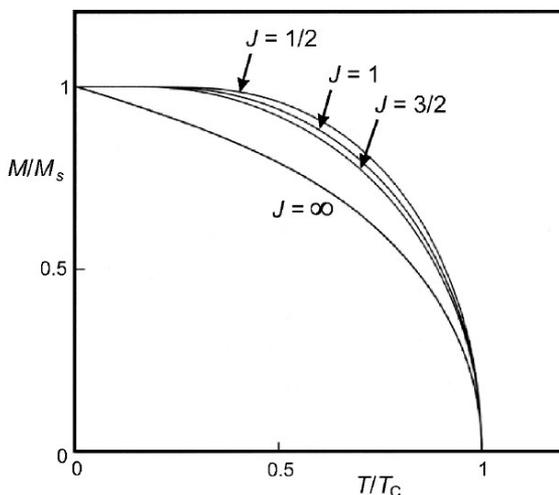


Рис. 7.6: Намагниченность ферромагнетика в модели Вейсса как функция температуры для различных значений полного момента импульса магнитного иона  $J$ . Из книги [5].

откуда получаем ответ для намагниченности вблизи критической температуры:

$$\left(\frac{M}{M_s}\right)^2 = \frac{10(J+1)^2}{3(J^2 + (J+1)^2)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (7.41)$$

Таким образом, получаем, что при  $T \rightarrow T_c$  намагниченность обращается в нуль корневым образом  $M/M_s \propto \sqrt{1 - T/T_c}$ .

Теперь найдем поведение намагниченности при  $T \rightarrow 0$ .  $y = (3J/J+1)(M/M_s)(T_c/T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$ . Пользуясь асимптотическим поведением котангенса  $\coth x \approx 1 + 2e^{-2x}$  при  $x \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\frac{M}{M_s} \approx 1 - \frac{1}{J} e^{-\frac{3T_c M}{(J+1)TM_s}} = 1 - \frac{1}{J} e^{-c/T}. \quad (7.42)$$

Таким образом, при низких температурах в модели Вейсса отклонение намагниченности от ее значения при нулевой температуре экспоненциально мало.

Найдем в приближении Вейсса восприимчивость ферромагнетика при  $T > T_c$ . Пусть приложено слабое внешнее поле  $\mathbf{B}$ . Тогда аргумент функции Бриллюэна  $y$  мал и можно воспользоваться разложением  $B_J(y) \approx [(J+1)/3J]y$ . тогда получаем:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{g_J \mu_B (J+1) B + \lambda M}{3k T} = \frac{T_c}{\lambda M_s} \frac{B + \lambda M}{T} \implies \frac{M}{M_s} = \frac{T_c B}{\lambda M_s T - T_c}. \quad (7.43)$$

Откуда для восприимчивости получаем закон Кюри-Вейсса:

$$\chi = \frac{T_c}{\lambda} \frac{1}{T - T_c} = \frac{c}{T - T_c}. \quad (7.44)$$

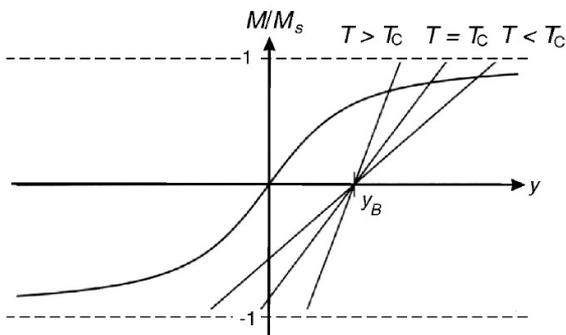


Рис. 7.7: Графический метод определения намагниченности в присутствии внешнего поля. Из книги [5].

Если теперь отказаться от условия малости внешнего магнитного поля, то уравнение (7.32) для намагниченности опять можно решать графически. Разница со случаем  $B = 0$  состоит в том, что теперь мы ищем пересечения функции Бриллюэна с прямой  $M/M_s = (kT/g_J \mu_B J \lambda M_s) y - B/(\lambda M_s)$ , не проходящей через начало координат, см. рис. 7.7. Очевидно, что в этом случае ненулевое решение для намагни-

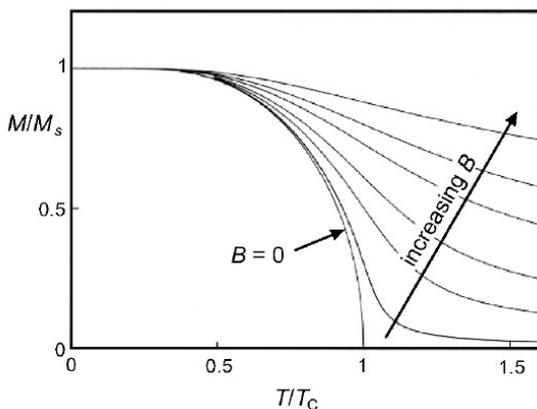


Рис. 7.8: Намагниченность ферромагнетика в модели Вейсса как функция температуры для  $J = 1/2$  различных значений внешнего поля. Из книги [5].

ченности существует при любой температуре. Таким образом, во внешнем поле фазовый переход при  $T = T_c$  исчезает.

### 7.3 Магнетизм коллективизированных электронов. Stonerovская неустойчивость.

Гамильтониан Гейзенберга, рассмотренный выше, описывает систему локализованных спинов. Однако, очевидно, что между коллективизированными электронами в металлах должно быть обменное взаимодействие той же природы. Для точного расчета электронных спектров и магнитных свойств металла с учетом этого обменного взаимодействия необходимо знание точной многоэлектронной волновой функции коллективизированных электронов, что явля-

ется очень сложной задачей. Однако, основные магнитные свойства системы коллективизированных электронов можно понять в рамках модели молекулярного поля, аналогичной рассмотренной выше для системы локализованных спинов. Предположим, что на каждый электрон свободного Ферми газа действует эффективное поле, пропорциональное намагниченности этого газа  $\mathbf{H}_{eff} = \lambda \mathbf{M}$  и исследуем задачу о возможности возникновения *спонтанной* намагниченности в такой системе.

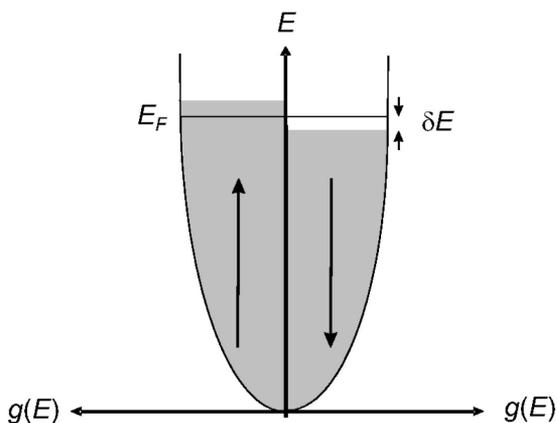


Рис. 7.9: К расчету спонтанного расщепления плотности состояний электронов в Ферми газе без приложения внешнего магнитного поля. Из книги [5].

Для того, чтобы в системе возник магнитный момент, надо, чтобы часть электронов перевернула свой спин и, соответственно перешла из спиновой подзоны  $\downarrow$  в спиновую подзону  $\uparrow$ , см. рис. 7.9. Это сопровождается проигрышем в кинетической энергии системы. Действительно, каждый из переходящих электронов, имеющий энергию  $E_F - \delta\varepsilon$  увеличивает свою энергию на  $2\delta\varepsilon$ . Если переходят электроны в полосе  $\delta E$ , то суммарное изменение кинетической энергии

электронов

$$\Delta E_{kin} = 2 \int_0^{\delta E} d(\delta \varepsilon) \frac{g(E_F)}{2} \delta \varepsilon = \frac{g(E_F)}{2} \delta E^2, \quad (7.45)$$

где  $g(E_F)$  - полная плотность состояний на уровне Ферми в расчете на 2 спина. Такое перераспределение электронов приводит к различию в электронных концентрациях для спинов вверх и вниз:

$$n_{\uparrow, \downarrow} = \frac{1}{2}n \pm \frac{1}{2}g(E_F)\delta E, \quad (7.46)$$

что, в свою очередь, генерирует ненулевую намагниченность в системе:

$$M = \mu_B(n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) = \mu_B g(E_F) \delta E. \quad (7.47)$$

В модели молекулярного поля намагниченность генерирует эффективное поле, в котором магнитный момент газа приобретает потенциальную энергию

$$\Delta E_{pot} = -\frac{1}{2}M(\lambda M) = -\frac{1}{2}Ug^2(E_F)\delta E^2, \quad (7.48)$$

где введено обозначение  $U = \lambda\mu_B^2$ . Полное изменение энергии Ферми-газа в результате возникновения спонтанной намагниченности:

$$\Delta E = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \frac{1}{2}g(E_F)(1 - Ug(E_F))\delta E^2. \quad (7.49)$$

Намагниченность возникает спонтанно если  $\Delta E < 0 \implies$

$$Ug(E_F) \geq 1. \quad (7.50)$$

Это условие представляет собой критерий неустойчивости газа электронов проводимости по отношению к возникновению ферромагнетизма (критерий Стонеровской неустойчивости). Стоит отметить, что в отличие от модели Вейсса

для локализованных спинов, где спонтанная намагниченность появляется при любом, сколь угодно малом значении  $\lambda$ , пусть и при низких температурах, здесь при малых значениях  $\lambda$  ферромагнетизм не появляется, т.к. энергетический выигрыш за счет потенциальной энергии компенсируется проигрышем в кинетической энергии, которая отсутствует в модели локализованных спинов.

В случае  $Ug(E_F) < 1$  спонтанной намагниченности не возникает, но, тем не менее, магнитная восприимчивость отличается от своего парамагнитного значения. Действительно, пусть к системе приложено внешнее магнитное поле  $B$ . Тогда суммарное изменение энергии системы из-за возникновения намагниченности:

$$\Delta E = \frac{1}{2}g(E_F)(1 - Ug(E_F))\delta E^2 - \mathbf{MB} = \frac{M^2}{2\mu_B^2g(E_F)}(1 - Ug(E_F)) - MB. \quad (7.51)$$

Из условия  $\partial E/\partial M = 0$  следует

$$M = \frac{\mu_B^2g(E_F)B}{1 - Ug(E_F)}, \quad (7.52)$$

т.е.

$$\chi = \frac{\mu_B^2g(E_F)}{1 - Ug(E_F)} = \frac{\chi_{Pauli}}{1 - Ug(E_F)}. \quad (7.53)$$

Т.о.  $\chi > \chi_{Pauli}$  из-за кулоновского взаимодействия. Это называется стонеровским усилением восприимчивости.

Значения стонеровского параметра  $U$ , плотности состояний на уровне Ферми и их произведения, показаны на рис. 7.10 для первых 50 элементов. Видно, что непосредственно критерию Стонера удовлетворяют только Fe, Co и Ni, которые действительно являются ферромагнитными металлами. Примером "почти" ферромагнитного металла является Pd, который близок к порогу стонеровской

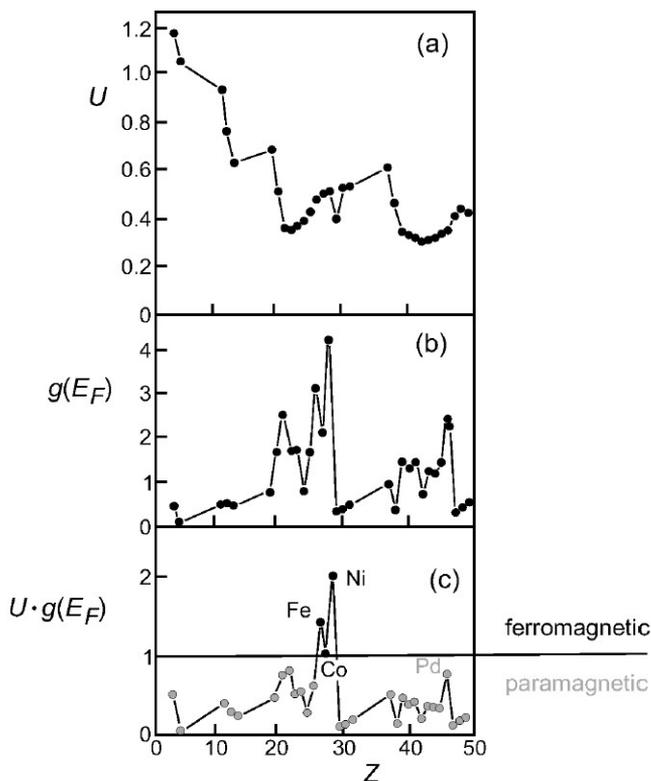


Рис. 7.10: Значения стонеровского параметра  $U$ , плотности состояний на уровне Ферми и их произведения для первых 50 элементов в условных единицах. Из книги [5].

неустойчивости и поэтому обладает большим значением парамагнитной восприимчивости. Даже небольшого количества Fe достаточно, чтобы сделать сплав PdFe ферромагнитным.

Из приведенных данных видно, что выполнение стонеровского критерия обеспечивается, в первую очередь, большим значением плотности состояний на уровне Ферми в данном металле. В переходных металлах можно условно

выделить 2 группы электронов, которые называются s- электроны или электроны проводимости и d-электроны или локализованные электроны, отвечающие за магнетизм. В силу сильного перекрытия электронных оболочек отдельных атомов обе группы электронов коллективизируются и их энергетический спектр образует зоны. Каждую группу электронов можно описывать волновой функцией Блоха

$$\begin{aligned}\psi_s(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_s(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \\ \psi_d(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_d(\mathbf{k}, \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (7.54)$$

Периодические функции  $u_s(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  являются делокализованными, а  $u_d(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  - сильно локализованы и имеют выраженные максимумы плотности вероятности в местах расположения ионов. Соответственно, энергетические зоны, отвечающие s-электронам - широкие и плотность состояний в них невелика, а d-зоны - узкие и плотность состояний в них имеет большое значение. Далее, в простейшем приближении в так называемой модели "жестких зон" различные элементы, имея разное количество коллективизированных электронов на атом, отличаются только расположением уровня Ферми. В переходных элементах уровень Ферми обычно попадает в d-зону, см. рис. 7.11. Если он приходится на середину d-зоны, то плотность состояний на уровне Ферми максимальна и критерий Стонера выполняется. В непериодических элементах уровень Ферми не попадает в d-зону, плотность состояний на уровне Ферми мала и критерий Стонера не выполняется.

При возникновении спонтанной намагниченности в равновесии уровни заполнения в обеих спиновых подзонах должны выровняться, но в результате появления потенциальной энергии электрона в эффективном поле дно спиновых подзон смещается на  $\pm\delta E$ , см. рис. 7.12. Если стонеровская неустойчивость не возникает, дно зон не смещается несмотря на наличие ненулевого обменного взаимодей-

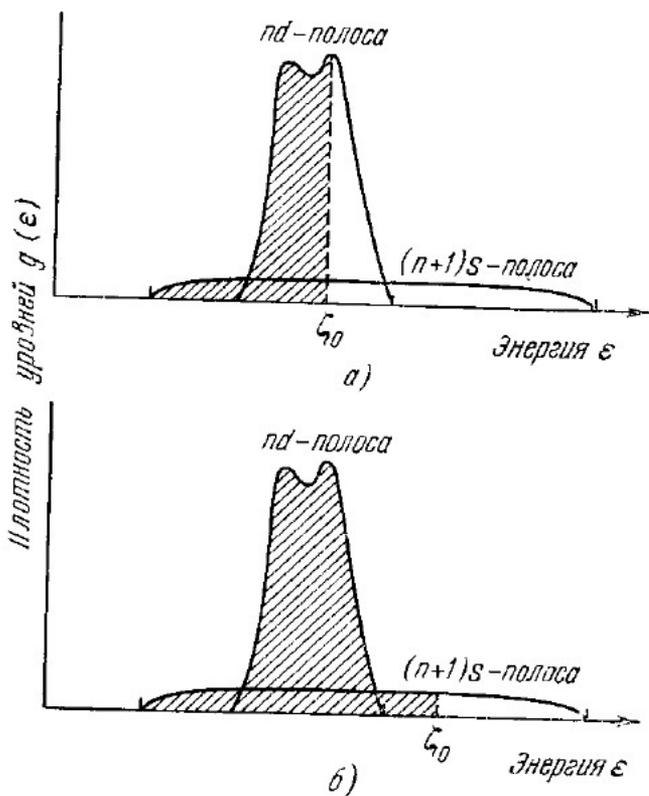


Рис. 7.11: Плотность состояний электронов в перекрывающихся s- и d-зонах. (а)-переходный металл, уровень Ферми лежит в d-зоне; (б)-непереходный металл, уровень Ферми лежит в s-зоне вне d-зоны. Заштрихованы области, заполненные электронами при  $T = 0$ . Из книги [12].

ствия, рис. 7.12(а) и (г). Если стонеровская неустойчивость возникает, но величина  $\delta E$  меньше некоторого критического значения, рис. 7.12(б) и (д), плотность электронных состояний в зоне проводимости есть для обоих спиновых подзон. Если же величина обменного взаимодействия так велика, что раздвижка зон большая и плотность состояний

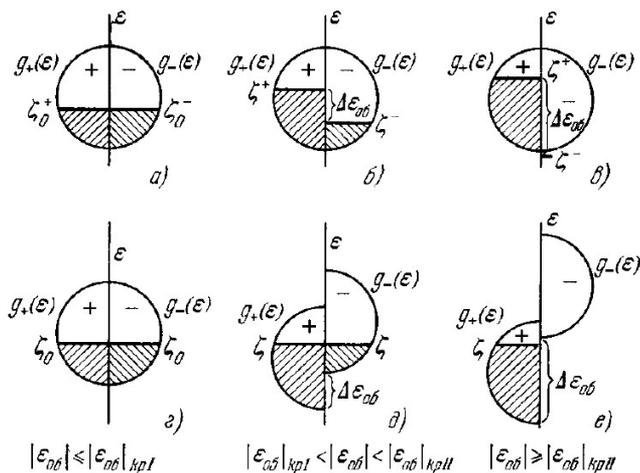


Рис. 7.12: Раздвижка спиновых подзон коллективизированных электронов в металле под влиянием обменного взаимодействия. Из книги [12].

на уровне Ферми есть только в одной из спиновых подзон, как на рис. 7.12(в) и (е), то это случай полуметалла, когда все проводящие носители имеют один и тот же спин.

Часто d-электроны в переходных металлах рассматриваются как полностью локализованные. Считается, что локализованные электроны ответственны за магнетизм, а коллективизированные s-электроны отвечают за проводимость. Тогда в гамильтониане системы взаимодействие d-электронов друг с другом учитывается в рамках модели Гейзенберга, но кроме того учитывается их обменное взаимодействие с s-электронами проводимости. Такой подход получил название s-d модели и широко используется, в частности, в спинтронике для описания эффектов контроля намагниченности магнетика электрическими токами.

## 7.4 Модель Вейсса. Антиферромагнетики.

Для антиферромагнетика обменный интеграл между ближайшими соседями имеет отрицательный знак. Антиферромагнетизм можно описывать, разделив ионную решетку на 2 подрешетки. Внутри каждой из подрешеток магнитное упорядочение - ферромагнитное. Между решетками - ориентация магнитных моментов антипараллельная. Эта ситуация схематически проиллюстрирована на рис. 7.13.

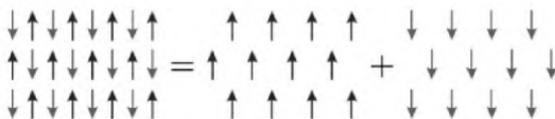


Рис. 7.13: Представление решетки антиферромагнетика как суммы двух подрешеток, внутри каждой из которых существует ферромагнитное упорядочение. Из книги [5].

Начнем с упрощенного рассмотрения случая, когда внешнее магнитное поле не приложено и эффективное поле Вейсса, действующее на каждую из подрешеток, пропорционально намагниченности второй подрешетки:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mf}^{(1)} &= -|\lambda| \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{B}_{mf}^{(2)} &= -|\lambda| \mathbf{M}_1. \end{aligned} \quad (7.55)$$

В этом случае намагниченность каждой из подрешеток подчиняется уравнению:

$$M_{1,2} = M_s B_J \left( -\frac{gJ\mu_B J |\lambda| M_{2,1}}{kT} \right). \quad (7.56)$$

Для антиферромагнетика  $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M$ . С учетом это-

го из (7.56) следует

$$M = M_s B_J \left( \frac{g_J \mu_B J |\lambda| M}{kT} \right). \quad (7.57)$$

Таким образом, в данном приближении намагниченность каждой решетки ведет себя точно также как и для ферромагнетика и исчезает при температуре Нееля  $T_N$ , которая определяется формулами (7.36)-(7.37).

Магнитную восприимчивость при температуре  $T > T_N$  можно найти из уравнения:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{J+1}{3J} \frac{g_J \mu_B J (B - |\lambda| M)}{kT} = \frac{T_N}{|\lambda| M_s} \frac{B - |\lambda| M}{T}, \quad (7.58)$$

откуда получаем

$$\frac{M}{M_s} = \frac{T_N B}{|\lambda| M_s T + T_N}. \quad (7.59)$$

Магнитная восприимчивость подчиняется закону Кюри-Вейсса для антиферромагнетиков:

$$\chi \propto \frac{1}{T + T_N}. \quad (7.60)$$

В следующем приближении необходимо учесть также и эффективное поле Вейсса от собственной подрешетки

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mf}^{(1)} &= v_1 \mathbf{M}_1 + v_2 \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{B}_{mf}^{(2)} &= v_2 \mathbf{M}_1 + v_1 \mathbf{M}_2, \end{aligned} \quad (7.61)$$

где  $v_2 < 0$ . При  $B = 0$  имеем  $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2 \implies$

$$\frac{M_1}{M_s} = B_J \left( \frac{g_J \mu_B J (v_1 - v_2) M_1}{kT} \right), \quad (7.62)$$

откуда можно найти температуру Нееля в этом приближении:

$$T_N = \frac{g_J \mu_B (J+1)(v_1 - v_2) M_s}{3k} = \frac{n(v_1 - v_2) \mu_{eff}^2}{3k} = c(v_1 - v_2). \quad (7.63)$$

Приложим небольшое внешнее магнитное поле при  $T > T_N$  и найдем в этом приближении магнитную восприимчивость:

$$B_J \approx \frac{J+1}{3J} \frac{g_J \mu_B J}{kT} [v_1 M_1 + v_2 M_2 + B]. \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{c}{T} (v_1 M_1 + v_2 M_2 + B), \\ M_2 &= \frac{c}{T} (v_2 M_1 + v_1 M_2 + B), \end{aligned} \quad (7.65)$$

где  $c = (g_J \mu_B (J+1) M_s) / (3k)$ . Из-за того, что  $B \neq 0$  условие  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$  больше не выполняется. Складывая уравнения (7.65), для суммарной намагниченности  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  получим:

$$\mathbf{M} = \frac{c}{T} (2\mathbf{B} + (v_1 + v_2)\mathbf{M}), \quad (7.66)$$

откуда следует

$$\mathbf{M} = \frac{2c\mathbf{B}}{T - c(v_1 + v_2)}. \quad (7.67)$$

Для магнитной восприимчивости получаем:

$$\chi = \frac{2c}{T - \Theta}, \quad \Theta = c(v_1 + v_2). \quad (7.68)$$

Таким образом, для антиферромагнетика существуют 2 характерных температуры:  $T_N$  - температура исчезновения

подрешеточной намагниченности и  $\Theta$  - входящая в восприимчивость характерная температура. Их отношение

$$\frac{T_N}{\Theta} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}. \quad (7.69)$$

Эти температуры сливаются в одну  $T_N = -\Theta$  только если пренебречь эффективным полем собственной подрешетки, т.е. положить  $v_1 = 0$ .

Теперь рассмотрим поведение антиферромагнетика при  $B \neq 0$  в слабом поле при  $T < T_N$ . Рассматриваем предел нулевой температуры, когда можно не учитывать тепловые флуктуации намагниченности относительно среднего значения. Основное состояние системы можно найти из условия минимума энергии. Учитывая, что  $\langle \mathbf{S}_i^{(\nu)} \rangle = -\mathbf{M}_\nu / (gJ\mu_B n)$ , где  $\nu$  - индекс подрешетки, а  $i$  - номер узла в данной подрешетке, выражение для энергии антиферромагнетика можно записать в виде:

$$E = -(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)\mathbf{B} - \frac{1}{2}v_1(M_1^2 + M_2^2) - v_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2. \quad (7.70)$$

Если слабое магнитное поле направлено параллельно намагниченности одной из подрешеток и, соответственно, антипараллельно второй, то это эквивалентно тому, что внутреннее эффективное поле, действующее в каждой из подрешеток, становится немного различно по величине, но в силу малости внешнего поля это не сказывается на значениях и направлении намагниченности. Таким образом, восприимчивость системы по отношению к параллельному полю  $\chi_{\parallel} = 0$  при  $T = 0$ . Эта восприимчивость становится отличной от нуля при ненулевых температурах из-за тепловых флуктуаций. Рассмотрим более интересный случай, когда внешнее поле приложено перпендикулярно начальному направлению, вдоль которого выстроена намагниченность обеих подрешеток.

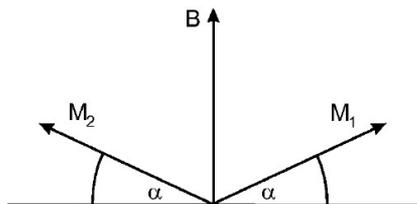


Рис. 7.14: Поворот намагниченностей подрешеток к направлению внешнего поля в случае перпендикулярной ориентации поля и начального положения намагниченностей. Из книги [5].

Пусть  $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M$ . Внешнее поле стремится развернуть намагниченности вдоль направления поля, а обменное взаимодействие стремится удержать их в антипараллельном состоянии. В результате конкуренции этих факторов возможно установление состояния, в котором обе намагниченности составляют некоторый угол со своим начальным положением. Из соображений симметрии эти углы должны быть одинаковыми. Обозначим их  $\alpha$ , см. рис. 7.14. Исследовать энергетическую выгодность такого состояния и найти величину угла  $\alpha$  можно из уравнения (7.70). Для конфигурации, изображенной на рис. 7.14 энергия равна:

$$E_{\perp} = -2MB \sin \alpha - v_1 M^2 + v_2 M^2 \cos 2\alpha. \quad (7.71)$$

Из условия  $dE_{\perp}/d\alpha = 0$  получаем

$$\cos \alpha (B + 2v_2 M \sin \alpha) = 0, \quad (7.72)$$

откуда легко получить, что минимум энергии отвечает

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\frac{B}{2v_2 M}, \quad 0 \leq B \leq -2v_2 M, \\ \cos \alpha &= 0, \quad B \geq -2v_2 M. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Таким образом, возникает ненулевое значение намагниченности антиферромагнетика вдоль направления поля, т.е.

перпендикулярно исходному направлению подрешеточных намагниченностей. Это значение равно

$$\begin{aligned} M_{\perp} = 2M \sin \alpha &= -\frac{B}{v_2}, \quad 0 \leq B \leq -2v_2M, \\ M_{\perp} &= 2M, \quad B \geq -2v_2M. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Соответствующая восприимчивость антиферромагнетика в перпендикулярном поле есть

$$\chi_{\perp} = \frac{dM_{\perp}}{dB} = -\frac{1}{v_2}. \quad (7.75)$$

Это значение совпадает с восприимчивостью при температуре Нееля. Мы получили, что восприимчивость антиферромагнетика при  $T < T_N$  является анизотропной. Для поликристаллических образцов, для которых различные направления неелевского вектора (подрешеточных намагниченностей) в различных доменах равновероятны, восприимчивость получается в результате усреднения:

$$\chi_{poly} = \frac{1}{3}\chi_{\parallel} + \frac{2}{3}\chi_{\perp}. \quad (7.76)$$

Качественное поведение всех восприимчивостей  $\chi_{\parallel}$ ,  $\chi_{\perp}$  и  $\chi_{poly}$  в зависимости от температуры представлено на рис. 7.15.

## 7.5 Модель Вейсса. Ферримагнетики.

Ферримагнетизм представляет собой промежуточное состояние между ферромагнетизмом и антиферромагнетизмом. Ниже критической температуры появляется ненулевая спонтанная намагниченность, но при высоких температурах восприимчивость подчиняется закону Кюри-Вейсса с отрицательной температурой Кюри, аналогично случаю антиферромагнетика.

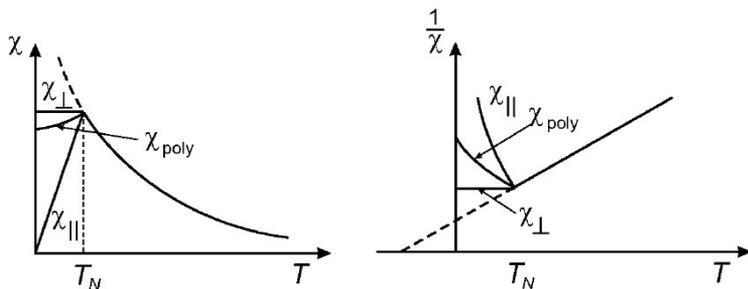


Рис. 7.15: Температурные зависимости магнитной восприимчивости и обратной магнитной восприимчивости. Из книги [5].

Рассмотрим простейшую модель ферримагнетика, в которой его можно разбить на 2 подрешетки с коллинеарными намагниченностями, но абсолютные величины намагниченностей подрешеток различны, т.е. полной компенсации намагниченности не происходит. Молекулярное поле Вейсса можно записать аналогично случаю антиферромагнетика, но теперь в силу различия двух подрешеток вклады в эффективное поле от собственной подрешетки для них различны:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mf}^{(1)} &= \alpha v \mathbf{M}_1 - v \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{B}_{mf}^{(2)} &= -v \mathbf{M}_1 + \beta v \mathbf{M}_2, \end{aligned} \quad (7.77)$$

где  $v > 0$ .

$$\begin{aligned} M_1 &= n g_{J_1} \mu_B J_1 B_J \left( \frac{g_{J_1} \mu_B J_1}{kT} (B + \alpha v M_1 - v M_2) \right), \\ M_2 &= n g_{J_2} \mu_B J_2 B_J \left( \frac{g_{J_2} \mu_B J_2}{kT} (B - v M_1 + \beta v M_2) \right). \end{aligned} \quad (7.78)$$

Выше температуры перехода аргумент  $B_J$  мал и ее можно разложить. Тогда для намагниченностей  $M_{1,2}$  получается

следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{c_1}{T}(B + \alpha v M_1 - v M_2), \\ M_2 &= \frac{c_2}{T}(B - v M_1 + \beta v M_2), \end{aligned} \quad (7.79)$$

где  $c_{1,2} = n g_{J_{1,2}}^2 \mu_B^2 J_{1,2}(J_{1,2} + 1)/3k$ . Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{c_1 T - c_1 c_2 \beta v - c_1 c_2 v}{T^2 - v(\alpha c_1 + \beta c_2) + c_1 c_2 v^2 (\alpha \beta - 1)} \mathbf{B}, \\ M_2 &= \frac{c_2 T - c_1 c_2 \alpha v - c_1 c_2 v}{T^2 - v(\alpha c_1 + \beta c_2) + c_1 c_2 v^2 (\alpha \beta - 1)} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\mathbf{M} = M_1 + M_2 = \frac{(c_1 + c_2)T - c_1 c_2 v(2 + \alpha + \beta)}{T^2 - v(\alpha c_1 + \beta c_2) + c_1 c_2 v^2 (\alpha \beta - 1)} \mathbf{B}. \quad (7.81)$$

Магнитную восприимчивость можно представить в виде:

$$\chi^{-1} = \frac{B}{M} = \frac{T}{c_1 + c_2} + \frac{1}{\chi_0} - \frac{\sigma}{T - \Theta}, \quad (7.82)$$

где  $\Theta = c_1 c_2 v(2 + \alpha + \beta)/(c_1 + c_2)$ ,  $\chi_0 = v(c_1 c_2 - \alpha c_1^2 - \beta c_2^2)/(c_1 + c_2)^2$ . Формула (7.82) объясняет поведение магнитной восприимчивости ферромагнетиков от температуры, представленное на рис. 7.16, с которым мы уже познакомились ранее.

Критическую температуру можно определить из условия  $\chi^{-1}(T_c) = 0$ . Это условие дает квадратное уравнение для определения критической температуры. Больше из его решений реализуется в силу выгоды ферромагнитного состояния по сравнению с парамагнитным, поэтому

$$T_c = \frac{v}{2} \left( \alpha c_1 + \beta c_2 + \sqrt{(\alpha c_1 - \beta c_2)^2 + 4c_1 c_2} \right). \quad (7.83)$$

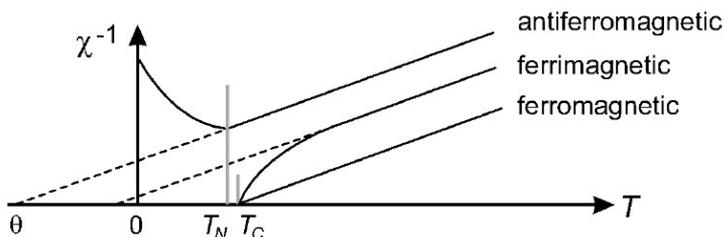


Рис. 7.16: Температурная зависимость обратной магнитной восприимчивости для ферромагнетика, антиферромагнетика и ферримагнетика. Из книги [5].

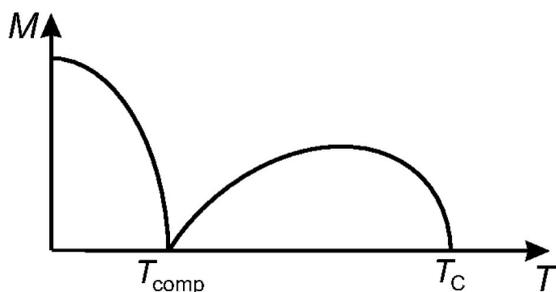


Рис. 7.17: Немонотонная зависимость намагниченности ферримагнетика от температуры с точкой компенсации  $T = T_{comp}$ , в которой намагниченность обращается в нуль. Из книги [5].

При  $T < T_c$  ферримагнетик проявляет ненулевую спонтанную намагниченность. Однако, из-за различных величин намагниченности обеих подрешеток и их разной температурной зависимости для ферримагнетика возможно ситуация, когда полная намагниченность является немонотонной функцией температуры и обращается в нуль при некоторой температуре, которая называется температурой компенсации  $T_{comp}$ . Пример такой зависимости изображен на рис. 7.17.

## 7.6 Магнетизм в рамках теории Ландау.

### 7.6.1 Магнетизм как спонтанное нарушение симметрии.

Возникновение спонтанно упорядоченного состояния при низких температурах - фундаментальное явление в физике твердого тела и макроскопическое проявление квантовой механики. Примерами таких состояний являются магнетизм и сверхпроводимость. Спонтанно-упорядоченное состояние характеризуется параметром порядка, который отличен от нуля при температурах ниже некоторой критической температуры  $T^*$  и равен нулю при  $T > T^*$ . Для ферромагнетизма таким параметром является намагниченность.

Каждое спонтанно-упорядоченное состояние соответствует определенному нарушению симметрии. Для магнетика выше критической температуры система обладает полной вращательной симметрией, все направления спина эквивалентны. Ниже критической температуры появляется предпочтительное направление спина. Сохраняется только вращательная симметрия в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Т.е. симметрия системы понижается  $O_3(R_3 + I) \rightarrow R_2$ . Важным обстоятельством здесь является то, что симметрия не может изменяться постепенно, она либо есть, либо нет. Поэтому при температуре  $T^*$  происходит симметричный фазовый переход. Состояние с более низкой симметрией отвечает более низкой температуре, а состояние с более высокой симметрией - более высокой температуре. Это можно понять из термодинамических соображений. Действительно, при конечных температурах система стремится к минимуму свободной энергии  $F = E - TS$ . При низких температурах минимум  $F$  определяется мини-

мумом энергии (который достигается для упорядоченного состояния), а при высоких температурах - побеждает второй член, который стремится создать в системе максимум энтропии.

### 7.6.2 Теория фазовых переходов Ландау для ферромагнетизма.

При температурах близких к критической параметр порядка мал и свободную энергию системы можно разложить по степеням этого параметра порядка, оставив только несколько членов, отвечающих самым низким степеням. Такой подход применяется к описанию любых симметричных фазовых переходов и называется феноменологической теорией фазовых переходов Ландау.

С точностью до членов  $O(M^4)$  свободная энергия ферромагнетика имеет вид:

$$F(M) = F_0 + a(T)M^2 + bM^4. \quad (7.84)$$

Члены, пропорциональные нечетным степеням намагниченности, зануляются в свободной энергии по симметричным соображениям. Величина  $M$  нечетна по отношению к преобразованию обращения времени, а свободная энергия должна быть инварианта по отношению к этому преобразованию.  $b > 0$  - константа, не зависящая от температуры,  $a(T) = a_0(T - T_c)$ ,  $a_0 > 0$ . Экстремумы свободной энергии определяются уравнением

$$\frac{\partial F(M)}{\partial M} = 0 \Rightarrow a(T)M + 2bM^3 = 0. \quad (7.85)$$

Точки экстремума свободной энергии:

$$M = 0, \quad (7.86)$$

$$M = \pm \sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{2b}}, \quad T < T_c. \quad (7.87)$$

Из исследования второй производной  $\partial^2 F / \partial^2 M$  получаем, что  $M = 0$  отвечает минимуму свободной энергии, т.е. является устойчивым состоянием при  $T > T_c$  и отвечает максимуму свободной энергии, т.е. представляет собой абсолютно неустойчивое состояние при  $T < T_c$ . В то же время, решение (7.87) дает минимум свободной энергии при  $T < T_c$ . Поэтому основное состояние ферромагнетика в рамках теории Ландау имеет вид:

$$M = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{2b}}, & T < T_c \\ 0, & T > T_c \end{cases} \quad (7.88)$$

Поведение свободной энергии как функции намагниченности показано на рис. 7.18.

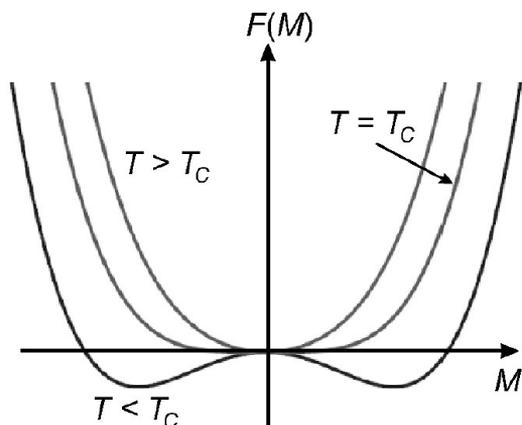


Рис. 7.18: Свободная энергия как функция намагниченности при температурах выше, ниже и равной критической. Из книги [5].

Из (7.88) видно, что поведение намагниченности вблизи критической температуры в рамках теории Ландау совпадает с результатом теории среднего поля Вейсса. Это

неудивительно, т.к. теория Ландау описывает среднее значение параметра порядка и, вообще говоря, становится неприменимой в очень узкой области температур вблизи  $T_c$ , когда среднеквадратичные флуктуации параметра порядка перестают быть малыми по сравнению со средним значением параметра порядка.

Вблизи критической температуры многие физические величины в системе зависят степенным образом от разности  $T - T_c$ , т.е.  $\propto (T_c - T)^x$ . Показатель  $x$  называется критическим индексом и зависит только от размерности системы, размерности параметра порядка и характера взаимодействия в системе (long-range or short range).

Для ферромагнитной системы можно вычислять следующие критические индексы:

$$M \propto (T_c - T)^\beta, \quad T < T_c \quad (7.89)$$

$$\chi \propto (T - T_c)^{-\gamma}, \quad T > T_c \quad (7.90)$$

$$c_h \propto (T - T_c)^{-\alpha}, \quad (7.91)$$

$$M \propto H^{1/\delta}, \quad T = T_c \quad (7.92)$$

$$\xi \propto (T_c - T)^{-\nu}, \quad T < T_c, \quad (7.93)$$

где  $c_h$  - удельная теплоемкость,  $\xi$  - корреляционная длина магнитного момента. На расстояниях  $r \ll \xi$  направления магнитных моментов сильно коррелированы, т.е. вероятность найти их в параллельном состоянии близка к единице, а на расстоянии  $r \gg \xi$  корреляции в их ориентации отсутствуют.

В уравнении (7.88) уже было получено, что  $\beta = 1/2$ . Вычислим корреляционную длину. Для этого выражение для свободной энергии надо обобщить на случай пространственно неоднородной намагниченности:

$$F(M) = \int d^3r \left[ c(\nabla M)^2 + a(T)M^2 + bM^4 - \mathbf{BM} \right]. \quad (7.94)$$

Рассмотрим периодическое приложенное магнитное поле  $\mathbf{B} = \delta B e^{i\mathbf{k}r}$ . Тогда намагниченность можно искать в виде  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta \mathbf{M} e^{i\mathbf{k}r}$ . Подставляя магнитное поле и намагниченность в таком виде в условие экстремума свободной энергии

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} = -2c\nabla^2 M + 2aM + 4bM^3 - B = 0, \quad (7.95)$$

получим

$$\delta B = \delta M(2a + 12bM_0^2 + 2ck^2). \quad (7.96)$$

Откуда получаем, что восприимчивость на данном волновом векторе  $k$  имеет вид:

$$\chi_k = \frac{1}{2a + 12bM_0^2 + 2ck^2}. \quad (7.97)$$

При  $T > T_c$   $M_0 = 0$ , поэтому

$$\chi_{k,+} = \frac{\chi_+(k=0)}{1 + k^2\xi_+^2}, \quad (7.98)$$

где корреляционная длина  $\xi_+ = \sqrt{c/a_0(T - T_c)} \propto (T - T_c)^{-1/2}$ .

При  $T < T_c$  подставляя  $M_0^2 = -a/2b$  в выражение (7.97), получим:

$$\chi_{k,-} = \frac{\chi_-(k=0)}{1 + k^2\xi_-^2}, \quad (7.99)$$

где корреляционная длина  $\xi_- = \sqrt{c/2a_0(T_c - T)} \propto (T - T_c)^{-1/2}$ . Таким образом, получаем  $\nu = 1/2$ .

### 7.6.3 Теория фазовых переходов Ландау для антиферромагнетизма.

В качестве параметра порядка выберем неелевский вектор  $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ . В отсутствии приложенного магнитного поля  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$ . Вблизи температуры Нееля вектор

$\mathbf{L}$  мал и свободную энергию можно разложить по степеням  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$ , но ненулевая намагниченность появляется только при наличии внешнего магнитного поля, поэтому более правильно раскладывать по степеням  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{H}$ . Без учета эффектов анизотропии выражение для свободной энергии имеет вид:

$$F = F_0 + aL^2 + bL^4 + D(\mathbf{H}\mathbf{L})^2 + D'H^2L^2 - \frac{1}{2}\chi_p H^2. \quad (7.100)$$

Линейный по полю член вида  $\mathbf{H}\mathbf{L}$  запрещен требованием инвариантности свободной энергии относительно преобразований, меняющих знак  $\mathbf{L}$ . Вблизи точки Нееля по-прежнему считаем  $a = a_0(T - T_c)$ ,  $b > 0$ . Минимизация свободной энергии при  $H = 0$  дает обычную для теории Ландау зависимость

$$L = \pm \sqrt{\frac{a_0}{2b}(T_c - T)}. \quad (7.101)$$

При наличии внешнего поля в парамагнитной фазе при  $T > T_c$  получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{H}} = -\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = -\frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{M} = -\chi_p \mathbf{H}. \quad (7.102)$$

Откуда следует, что феноменологическая константа  $\chi_p$  отвечает значению парамагнитной восприимчивости при  $T > T_c$ .

В антиферромагнитной фазе при  $H \rightarrow 0$ , т.е. пренебрегая зависимостью  $\mathbf{L}$  от поля, получим:

$$\mathbf{M} = \chi_p \mathbf{H} - 2D\mathbf{L}(\mathbf{L}\mathbf{H}) - 2D'L^2\mathbf{H}. \quad (7.103)$$

При выводе (7.103) было пренебрежено величиной  $(1/4\pi)\mathbf{H}$  по сравнению с остальными членами. При  $\mathbf{H} \perp \mathbf{L}$  из (7.103) получаем:

$$\mathbf{M} = \chi_{\perp} \mathbf{H}, \quad \chi_{\perp} = \chi_p - 2D'L^2 = \chi_p - \frac{D'a_0}{b}(T_c - T). \quad (7.104)$$

В продольном поле

$$M = \chi_{\parallel} \mathbf{H},$$

$$\chi_{\parallel} = \chi_{\perp} - 2DL^2 = \chi_p - \frac{(D + D')a_0}{b}(T_c - T). \quad (7.105)$$

Видно, что восприимчивость для антиферромагнетика получается анизотропной, даже при пренебрежении всеми энергиями анизотропии. Кроме того, и в самой точке Нееля восприимчивость остается конечной и непрерывной, а ее производные испытывают скачок. Это существенное отличие от ферромагнетика, где восприимчивость обращается в бесконечность в точке перехода. Это различие связано с различием в поведении ферромагнетиком и антиферромагнетиков под действием приложенного магнитного поля. В ферромагнетике уже сколь угодно слабое поле размывает переход, т.к. намагничивая парамагнитную фазу, оно устраняет различие в симметрии обеих фаз. Антиферромагнитное же упорядочение *не может быть создано магнитным полем*, симметричная разница между двумя фазами сохраняется и в присутствии поля и переход остается резким.

## 7.7 Модель Гейзенберга за пределами приближения среднего поля. Магноны.

В общем виде гамильтониан модели Гейзенберга записывается в виде:

$$\hat{H} = - \sum_{ij} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j \quad (7.106)$$

Пусть  $J_{ij} = J \neq 0$  только для ближайших соседей. Гамильтониан Гейзенберга можно записать в виде:

$$\hat{H} = -J \sum_{ij} [\alpha(\hat{S}_i^x \hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_j^y) + \beta \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z]. \quad (7.107)$$

Пусть  $D$  - размерность вектора спина. Тогда для  $D = 1$  ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ) гамильтониан Гейзенберга называется моделью Изинга. Для  $D = 2$  ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ) - XY-модель. Для случая  $D = 3$  сохраняется название модель Гейзенберга.

Кроме размерности вектора спина есть еще размерность пространства  $d$ . Результаты, выдаваемые описанными моделями, существенно зависят от размерности пространства. Рассмотрим модель Изинга.

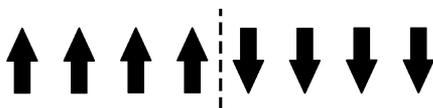


Рис. 7.19: Одномерная изинговская цепочка с одним дефектом.

Случай  $D = 1, d = 1$  (одномерная изинговская цепочка  $N + 1$  спинов).

$$\hat{H} = -2J \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z, \quad J > 0 \quad (7.108)$$

В основном состоянии все спины выстроены параллельно, энергия основного состояния  $E_0 = -2JN \frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} NJ$ . Рассмотрим 1 дефект, см. рис. 7.19. Энергия системы с дефектом  $E = E_0 + J$ . Энтропия системы с одним дефектом  $S = k \ln N$ . Поэтому  $F = E - TS \rightarrow -\infty$  при  $N \rightarrow \infty$  и  $T \neq 0$ . Отсюда следует, что упорядоченное состояние не может существовать в данной модели при  $T > 0$ . Т.е. фазового перехода нет,  $T_c = 0$ .

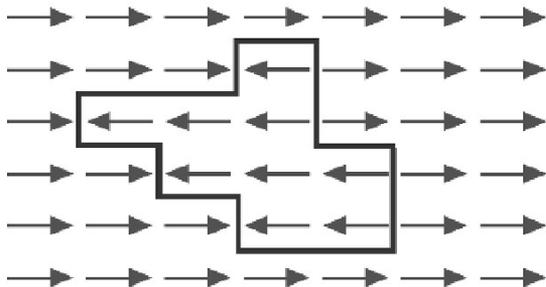


Рис. 7.20: Дефект в двумерной модели Изинга. Из книги [5].

Случай  $D = 1, d = 2$  (двумерная модель Изинга). Возможный дефект представлен на рис. 7.20.  $E - E_0 \propto l$ , где  $l$ -длина границы дефекта. Энтропия также растет пропорционально длине границы. Отсюда следует выгодность упорядоченного состояния при  $T < T_c$ . Фазовый переход в двумерной модели Изинга существует.

Для одномерной и двумерной моделей Изинга были получены точные решения.

### 7.7.1 Модель Гейзенберга. Спиновые волны.

Гамильтониан Гейзенберга во внешнем поле имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j - g\mu_B H \sum_i \hat{S}_{z,i}. \quad (7.109)$$

Основное состояние этого гамильтониана:

$$|0\rangle = \prod_i |S\rangle_i = |S\rangle_1 |S\rangle_2 \dots |S\rangle_N. \quad (7.110)$$

Чтобы убедиться, что это собственное состояние гамильтониана, введем повышающий и понижающий операторы  $\hat{S}_{\pm,i} = \hat{S}_{x,i} \pm i\hat{S}_{y,i}$ .

$$\hat{S}_{\pm,i}|S_z\rangle_i = \sqrt{(S \mp S_z)(S + 1 \pm S_z)}|S_z \pm 1\rangle_i \quad (7.111)$$

Через повышающий и понижающий операторы гамильтониан можно записать в виде:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \hat{S}_{z,i} \hat{S}_{z,j} - g\mu_B H \sum_i \hat{S}_{z,i} - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \hat{S}_{-,i} \hat{S}_{+,j}. \quad (7.112)$$

Т.к.  $\hat{S}_{+,i}|S_z,i\rangle|_{S_z,i=S} = 0$ , то  $|0\rangle$  -собственный вектор гамильтониана (7.112). Энергия, отвечающая этому собственному состоянию

$$E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle = -\frac{1}{2}S^2 \sum_{ij} J_{ij} - Ng\mu_B HS. \quad (7.113)$$

Можно показать, что  $E_0$  - минимальная энергия системы (задача для самостоятельного решения). Отсюда следует, что  $|0\rangle$  - основное состояние ферромагнетика.

Теперь найдем низколежащие возбужденные состояния ферромагнетика. При  $T = 0$  ферромагнетик находится в основном состоянии, все его спины выстроены параллельно, а намагниченность равна намагниченности насыщения  $M = g\mu_B nS$ . При  $T \neq 0$  для нахождения средней намагниченности надо усреднять средние намагниченности во всех возбужденных состояниях с гиббсовским фактором  $e^{-E/T}$ . Для построения низколежащих возбужденных состояний рассмотрим состояние

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} \hat{S}_{-,i}|0\rangle. \quad (7.114)$$

Это состояние отвечает уменьшенной на 1 проекции спина на ось  $z$  в узле  $i$ . Действие повышающего оператора не

обращает это состояние в нуль  $\hat{S}_{+,i}|i\rangle \neq 0$ , а действие оператора  $\hat{S}_{-,j}\hat{S}_{+,i}$  перекидывает пониженный спин из узла  $i$  в узел  $j$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{-,j}\hat{S}_{+,i}|i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2S}}\hat{S}_{-,j}\hat{S}_{+,i}\hat{S}_{-,i}|0\rangle = \\ \hat{S}_{-,j}\hat{S}_{+,i}|SSS\dots\underbrace{S-1}_{i}\dots SSS\rangle &= \sqrt{2S}\hat{S}_{-,j}|0\rangle = 2S|j\rangle. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Поэтому состояние  $|i\rangle$  не является собственным состоянием гамильтониана Гейзенберга. Кроме того,

$$\hat{S}_{z,j}|i\rangle = \begin{cases} S|i\rangle, & i \neq j, \\ (S-1)|i\rangle, & i = j. \end{cases} \quad (7.116)$$

С учетом этого получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}|i\rangle &= \left(-\frac{1}{2}S^2 \sum_{ij} J_{ij} - Ng\mu_B HS\right)|i\rangle + g\mu_B H|i\rangle + \\ & S \sum_j J_{ij} (|i\rangle - |j\rangle) = \\ E_0|i\rangle + g\mu_B H|i\rangle + S \sum_j J_{ij} (|i\rangle - |j\rangle), \end{aligned} \quad (7.117)$$

откуда следует, что  $|i\rangle$  уже не является собственным состоянием гамильтониана Гейзенберга, но  $\hat{H}|i\rangle$  представляет собой линейную комбинацию состояний, в которых значение проекции одного из спинов уменьшилось на 1. Мы можем найти такую комбинацию состояний  $|i\rangle$ , которая является собственной для гамильтониана  $\hat{H}$ . Ее можно искать в виде

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{ikl} |l\rangle. \quad (7.118)$$

Необходимо, чтобы  $|k\rangle$  было собственным состоянием гамильтониана, т.е. чтобы  $\hat{H}|k\rangle = E_k|k\rangle$ . Подействуем гамильтонианом на состояние  $|k\rangle$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}|k\rangle &= (E_0 + g\mu_B H)|k\rangle + \frac{S}{\sqrt{N}} \sum_{lj} J_{lj} e^{ikl} (|l\rangle - |j\rangle) = \\ &= (E_0 + g\mu_B H)|k\rangle + S \sum_{l-j} J_{lj} (1 - e^{ik(l-j)})|k\rangle. \end{aligned} \quad (7.119)$$

Таким образом,

$$E_k = (E_0 + g\mu_B H) + 2S \sum_{i-j} J_{ij} \sin^2 \frac{k(i-j)}{2}. \quad (7.120)$$

Энергия возбуждения состояния  $|k\rangle$ :

$$\varepsilon_k = E_k - E_0 = g\mu_B H + 2S \sum_{i-j} J_{ij} \sin^2 \frac{k(i-j)}{2}. \quad (7.121)$$

Теперь рассмотрим физическую интерпретацию состояния  $|k\rangle$ :

1)  $|k\rangle$  - суперпозиция состояний со спином  $NS - 1$ .

2) Вероятность обнаружить уменьшенное значение спина на узле  $i$ :  $P_i = |\langle k|i\rangle|^2 = 1/N$ , откуда следует, что уменьшенный спин с равной вероятностью может принадлежать любому магнитному иону.

3) Поперечная корреляционная функция:

$$\begin{aligned} \langle k|\hat{S}_\perp(i)\hat{S}_\perp(j)|k\rangle &= \langle k|\hat{S}_{x,i}\hat{S}_{x,j} + \hat{S}_{y,i}\hat{S}_{y,j}|k\rangle = \\ &= \frac{2S}{N} \cos[k(i-j)], \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Поэтому любой спин имеет малую поперечную составляющую, в среднем равную  $\sqrt{2S/N}$ , ориентации поперечных компонент двух спинов на расстоянии  $i-j$  составляют угол  $k(i-j)$ .

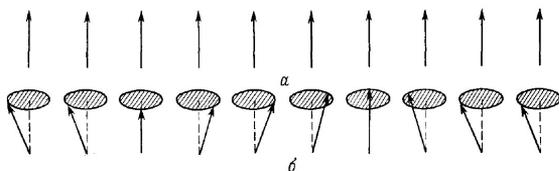


Рис. 7.21: (а) Цепочка спинов для ферромагнитного состояния; (б) для состояния со спиновой волной. Из книги [9].

Распределение намагниченности в состоянии  $|k\rangle$  показано на рис. 7.21. Это состояние со спиновой волной или магнон с волновым вектором  $k$  и энергией  $\varepsilon_k$ . Такие состояния с одним магноном являются точными собственными состояниями гамильтониана Гейзенберга. При расчете низкотемпературных свойств часто предполагают, что более высоколежащие возбужденные состояния гамильтониана могут быть построены как многомагнонные состояния с энергией равной сумме энергий отдельных магнонов. Для фотонов в гармоническом кристалле такие состояния также, как и однофотонные, являются точными собственными состояниями гамильтониана, но для спиновых волн - это только приближенно из-за взаимодействия магнонов. Тем не менее, многомагнонное приближение, когда предполагается, что более высокие возбужденные состояния имеют энергию  $\varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} + \dots + \varepsilon_{kN}$ , правильно воспроизводит основной член намагниченности при низких температурах. Поэтому мы воспользуемся им для вычисления  $M(T)$ .

Т.к. каждая спиновая волна уменьшает полный спин системы на 1, намагниченность системы при низкой температуре  $T$  имеет вид:

$$M(T) = M(0) \left[ 1 - \frac{1}{NS} \sum_k n_k \right], \quad (7.123)$$

где  $n_k = 1/(e^{\varepsilon_k/kT} - 1)$  - среднее число магнонов с волновым

вектором  $k$ . При низких температурах возбуждаются только спиновые волны с маленькой энергией, поэтому  $k \ll 1$  и тогда

$$\varepsilon_k \approx \frac{S}{2} \sum_{i-j} J_{ij} k^2 (i-j)^2 \propto k^2. \quad (7.124)$$

Следовательно  $d\varepsilon/dk \propto k \propto \sqrt{\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} \sum_k n_k &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon_k/kT} - 1} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2 dk}{e^{\varepsilon_k/kT} - 1} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{k^2 d\varepsilon \frac{1}{d\varepsilon/dk}}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = \int \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}, \end{aligned} \quad (7.125)$$

где  $g(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$ . Таким образом,

$$\sum_k n_k = A \int_0^\infty (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} \propto T^{3/2}. \quad (7.126)$$

Поэтому для низкотемпературной намагниченности получаем

$$\frac{M(T)}{M(0)} = 1 - cT^{3/2}. \quad (7.127)$$

Это выражение называется закон  $T^{3/2}$  Блоха. Закон  $T^{3/2}$  хорошо подтверждается результатами экспериментов в изотропных ферромагнетиках, см. рис. 7.22.

Таким образом, магноны вносят существенный вклад в намагниченность магнетика, приводя к кардинальному отличию намагниченности при низких температурах от модели среднего поля, в которой отличие намагниченности от ее значения при нулевой температуре оказывается экспоненциально подавленным, см. формулу (7.42). Еще более кардинальное влияние магноны оказывают на намагниченность в двумерном и одномерном случаях. В 1D и 2D

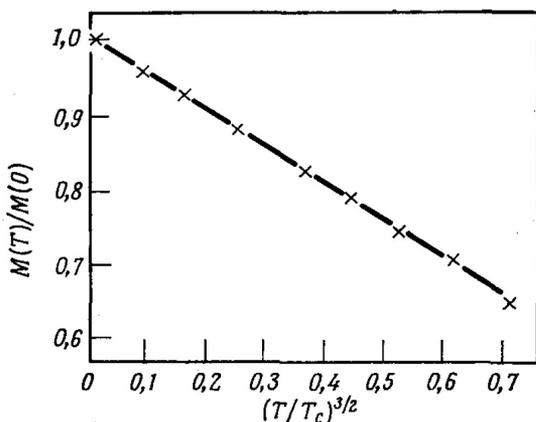


Рис. 7.22: Зависимость отношения спонтанной намагниченности гадолия ( $T_c = 293K$ ) к намагниченности насыщения при  $T = 0$  от  $(T/T_c)^{3/2}$ . Из книги [9].

модели Гейзенберга намагниченность равна нулю при любой температуре  $T > 0$ , т.е. ферромагнетизма не существует. Это утверждение носит название теоремы Мермина-Вагнера. Причиной отсутствия спонтанной намагниченности является то, что количество магнонов с малыми энергиями, которые могут возбуждаться при сколь угодно низкой температуре, расходится и они разрушают любой магнитный порядок. Покажем это в случае  $d = 2$ .

$$\sum_k n_k^{2D} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{e^{\varepsilon_k/kT} - 1} \propto \int \frac{kdk}{e^{\varepsilon_k/kT} - 1} \propto \int \frac{k d\varepsilon \frac{1}{d\varepsilon/dk}}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \propto \int \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \quad (7.128)$$

Таким образом,

$$\sum_k n_k \propto \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1}, \quad (7.129)$$

который логарифмически расходится на нижнем пределе. Однако, 2D ферромагнетики и антиферромагнетики существуют и в последние годы эта область физики бурно развивается, открыто много соответствующих материалов, которые получают в основном путем отделения монослоев от ван-дер-Ваальсовых слоистых кристаллов [10]. Дело здесь в том, что расходимость низкотемпературного числа магнонов в 2D существенным образом основывается на бесцелевом характере спектра магнонов в изотропной модели Гейзенберга (7.124), т.е. на том факте, что магноны могут возбуждаться на сколь угодно близких к нулю энергиях. На самом деле, все двумерные материалы находятся в трехмерном окружении (лежат на подложке), которое вызывает анизотропию их свойств. В анизотропном случае магнитные моменты не могут поворачиваться в любом направлении с бесконечно малым изменением энергии. В результате этого в спектре магнонов открывается щель

$$\varepsilon_k = \Delta + Bk^2, \quad (7.130)$$

что приводит к тому, что количество возбуждаемых при низких температурах магнонов становится конечным:

$$\sum_k n_k^{2D,an} \propto \int_{\Delta}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \quad (7.131)$$

Этот результат обеспечивает возможность появления ферромагнетизма в 2D системах при  $T > 0$ .



# Глава 8

## Магнитная анизотропия.

Ранее рассматривались только магнитно-изотропные системы, для которых свободная энергия не зависит от направления намагниченности  $F = F(|\mathbf{M}|)$ . В частности, для изотропного гамильтониана Гейзенберга энергетические уровни не зависят от направления  $\mathbf{M}$ . Реальные магнитные материалы не изотропны. Магнитная анизотропия может иметь различные физические причины. Наиболее важные классы магнитных анизотропий перечислены ниже:

1. Магнитокристаллическая анизотропия - намагниченность ориентируется вдоль определенных осей в кристалле.
2. Анизотропия формы - направление намагниченности определяется формой образца.
3. Индукцированная магнитная анизотропия - определенные направления намагниченности могут быть стабилизированы, временно помещая образец в магнитное поле.
4. Магнитострикция - анизотропия, связанная со спонтанной деформацией образца.
5. Поверхностная анизотропия.

## 8.1 Магнитокристаллическая анизотропия.

Этот тип анизотропии вызван спин-орбитальным взаимодействием  $E \propto \mathbf{LS}$ . Электронные орбитали после усреднения вытянуты вдоль определенных осей в кристалле, есть выделенные направления для орбитального момента. Поэтому намагниченность, определяемая спиновым моментом, также стремится лечь вдоль кристаллических осей. Спин-орбитальное взаимодействие может вычисляться из первых принципов, однако более просто использовать феноменологический подход. В рамках этого подхода записывается феноменологическое выражение для вклада в свободную энергию системы, основанное на симметричных соображениях.

Введем направляющие косинусы вектора намагниченности:

$$\alpha_1 = \frac{M_x}{M} = \sin \theta \cos \phi, \quad (8.1)$$

$$\alpha_2 = \frac{M_y}{M} = \sin \theta \sin \phi, \quad (8.2)$$

$$\alpha_3 = \frac{M_z}{M} = \cos \theta, \quad (8.3)$$

где  $\theta$  - полярный угол, а  $\phi$  - азимутальный угол сферической системы координат.  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ . Энергия магнитной анизотропии может быть разложена в ряд по компонентам намагниченности (направляющим косинусам):

$$E_{crys} = E_0 + \sum_i b_i \alpha_i + \sum_{ij} b_{ij} \alpha_i \alpha_j + \sum_{ijk} b_{ijk} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \sum_{ijkl} b_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (8.4)$$

Энергия анизотропии не зависит от изменения знака намагниченности  $E(\mathbf{M}) = E(-\mathbf{M})$ , откуда следует, что ко-

эффиценты перед нечетными степенями направляющих косинусов равны нулю. Дальнейшие содержательные продвижения могут быть получены для конкретных кристаллографических систем.

### 8.1.1 Кубическая симметрия кристалла.

В силу симметрии  $E(\alpha_i) = E(-\alpha_i)$ , откуда следует, что члены  $\propto \alpha_i \alpha_j$  с  $i \neq j$  зануляются, и, вообще, члены, в которых  $\alpha_i$  содержится в любой нечетной степени, также зануляются. Более того, для кубической симметрии все три кристаллические оси  $x, y, z$ , сонаправленные с ребрами куба, эквивалентны. Поэтому  $b_{11} = b_{22} = b_{33}$ , что дает

$$\sum_{ij} b_{ij} \alpha_i \alpha_j = b_{11}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3) = b_{11}, \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} b_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l &= b_{1111}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4) + \\ &6b_{1122}(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Учитывая (8.5) и (8.6), из (8.4) получаем:

$$\begin{aligned} E_{crys} &= E_0 + b_{11} + b_{1111}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4) + \\ &6b_{1122}(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2) + \dots, \end{aligned} \quad (8.7)$$

что с учетом соотношения  $1 = (\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3)^2 = \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + 2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2)$  может быть переписано в виде:

$$E_{crys}^{cubic} = K_0 + K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2) + K_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \dots \quad (8.8)$$

Рассмотрим, как выглядят энергетические поверхности в зависимости от направления в кубическом кристалле.

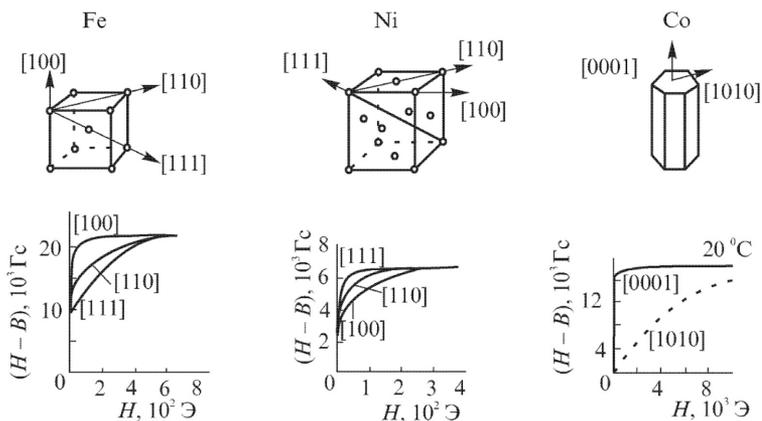


Рис. 8.1: Верхний ряд: главные кристаллографические направления для кристаллов кубической симметрии (Fe, Ni) и кристалла гексагональной симметрии (Co). Нижний ряд: Кривые намагничивания соответствующих монокристаллов вдоль главных кристаллографических направлений. Из книги [7].

Для главных кристаллографических направлений в кубическом кристалле (см. рис. 8.1) имеем:

$$[100]: \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$E_{100} = K_0, \quad (8.9)$$

$$[110]: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}, \alpha_3 = 0$$

$$E_{110} = K_0 + \frac{1}{4}K_1, \quad (8.10)$$

$$[111]: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{3},$$

$$E_{111} = K_0 + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{27}K_2. \quad (8.11)$$

	bcc-Fe	fcc-Ni	hcp-Co
$K_1$ [J/m <sup>3</sup> ]	$5.48 \cdot 10^4$	$-12.63 \cdot 10^4$	$7.66 \cdot 10^5$
[eV/atom]	$4.02 \cdot 10^{-6}$	$-8.63 \cdot 10^{-6}$	$5.33 \cdot 10^{-5}$
$K_2$ [J/m <sup>3</sup> ]	$1.96 \cdot 10^2$	$5.78 \cdot 10^4$	$1.05 \cdot 10^5$
[eV/atom]	$1.44 \cdot 10^{-8}$	$3.95 \cdot 10^{-6}$	$7.31 \cdot 10^{-6}$
$K_3$ [J/m <sup>3</sup> ]	$0.9 \cdot 10^2$	$3.48 \cdot 10^3$	–
[eV/atom]	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	–

Рис. 8.2: Константы магнитокристаллической анизотропии для Fe, Ni и Co при  $T = 4.2K$ . Из книги [5].

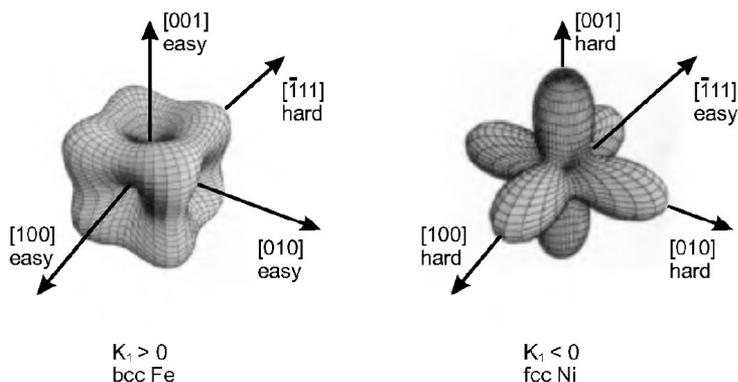


Рис. 8.3: Энергетические поверхности. Из книги [5].

Значения констант анизотропии для монокристаллов Fe, Ni и Co представлены в таблице на рис. 8.2. Из таблицы видно, что наиболее важна константа  $K_1$ . Учитывая только эту константу, получаем, что при  $K_1 > 0$  направление  $[100]$  является осью легкого намагничивания, а направление  $[111]$  - тяжелая ось. Примером соответствующего материала может служить Fe. Наоборот, при  $K_1 < 0$  направление  $[111]$  является осью легкого намагничивания, а направление  $[100]$  - тяжелая ось. Примером является Ni. Энергетические поверхности для Fe и Ni представлены на рис. 8.3.

Величина константы анизотропии также определяет скорость достижения намагниченности насыщения при намагничивании образца в поле определенного направления. Соответствующие кривые намагничивания представлены для Fe, Ni и Co в нижнем ряду на рис. 8.1.

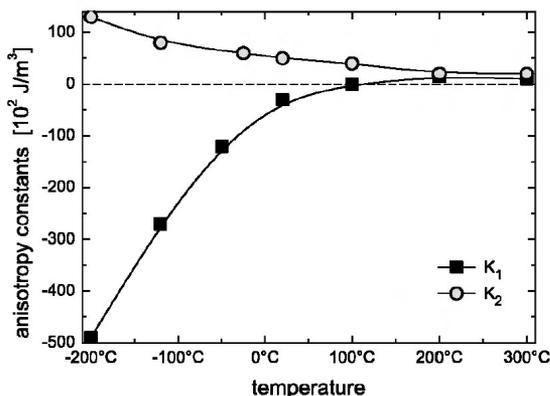


Рис. 8.4: Температурная зависимость констант магнито-кристаллической анизотропии для Ni. Из книги [5].

Если константы  $K_1$  и  $K_2$  одного порядка величины, как это иногда бывает (например, для Ni в определенном диапазоне температур), то учет  $K_2$  может сильно изменить картину энергии магнитной анизотропии. Например направление [110] может стать как легкой, так и тяжелой осью. Константы анизотропии существенно зависят от температуры, см. рис. 8.4, т.ч. направления легких и тяжелых осей могут поменяться с изменением температуры.

### 8.1.2 Тетрагональная и гексагональная симметрия кристалла.

*Тетрагональная симметрия.* Как и в случае кубического кристалла  $E(\alpha_i) = E(-\alpha_i)$ , откуда следует, что члены  $\propto$

$\alpha_i \alpha_j$  с  $i \neq j$  зануляются. Но в данном случае симметрия кристалла понижается, т.ч. одна из кристаллических осей не эквивалентна двум остальным. Поэтому только индексы  $i = 1$  и  $2$  неотличимы. В этом случае

$$\sum_{ij} b_{ij} \alpha_i \alpha_j = b_{11}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + b_{33} \alpha_3^2. \quad (8.12)$$

Используя  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 - \alpha_3^2$ , из (8.12) получим

$$\sum_{ij} b_{ij} \alpha_i \alpha_j = b_{11} + (b_{33} - b_{11}) \alpha_3^2 = a_0 + a_1 \alpha_3^2. \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} b_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l = & b_{1111}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4) + b_{3333} \alpha_3^4 + \\ & 6b_{1122} \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 12b_{1133} \alpha_3^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Подставляя (8.13) и (8.14) в (8.4), получим:

$$\begin{aligned} E_{crys}^{tetra} = & K_0 + K_1 \alpha_3^2 + K_2 \alpha_3^4 + K_3 (\alpha_1^4 + \alpha_2^4) + \dots = \\ & K_0 + K_1 \cos^2 \theta + K_2 \cos^4 \theta + K_3 \sin^4 \theta (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) = \\ & K'_0 + K'_1 \sin^2 \theta + K'_2 \sin^4 \theta + K'_3 \sin^4 \theta \cos 4\phi + \dots \end{aligned} \quad (8.15)$$

Член  $\propto \cos 4\phi$  отражает наличие оси симметрии 4-ого порядка.

*Гексагональная симметрия.* Приведем без вывода выражение для энергии анизотропии гексагонального кристалла:

$$E_{crys}^{hex} = K_0 + K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta + K_3 \sin^6 \theta + \quad (8.16)$$

$$K_4 \sin^6 \theta \cos 6\phi + \dots \quad (8.17)$$

Из (8.15) и (8.17) видно, что  $E_{crys}^{tetra}$  обладает цилиндрической симметрией с точностью до второго порядка по  $\sin \theta$ ,

а  $E_{crys}^{hex}$  с точностью до 4ого порядка. Вплоть до этих порядков точности (как правило, такой точности достаточно для хорошего согласия с экспериментом) тетрагональные и гексагональные кристаллы эквивалентны кристаллам с одноостной магнитной анизотропией.

Итак, для тетрагонального и гексагонального кристаллов

$$E_{crys} = K_0 + K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta. \quad (8.18)$$

При  $K_1 > 0$  и  $K_2 > 0$   $[001]$  - легкая ось. Это называется магнетик типа легкая ось. При  $K_1 < 0$  и  $K_2 < 0$   $[001]$  - тяжелая ось. Намагниченность стремится лечь в  $xy$ -плоскость и такой магнетик называется магнетик типа легкая плоскость. Если одна из констант положительная, а другая отрицательная, то при  $\sin^2 \theta = -K_1/2K_2$  происходит переход магнетика из одного типа в другой.

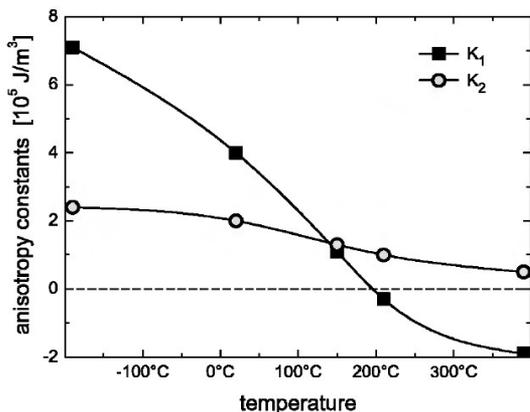


Рис. 8.5: Температурная зависимость констант магнито-кристаллической анизотропии для Co. Из книги [5].

Примером одноостного кристалла типа легкая ось может являться Co при низкой температуре, см. таблицу на

рис. 8.2. При высоких температурах  $\sim 500 - 600K$  происходит переход Со из типа легкая ось в тип легкая плоскость из-за температурной зависимости констант анизотропии, см. рис. 8.5.

### 8.1.3 Пример влияния магнитокристаллической анизотропии на поведение намагниченности: спин-флоп фаза.

Рассмотрим антиферромагнетик во внешнем магнитном поле. Предполагается, что антиферромагнетик имеет тип легкая ось. Без магнитного поля неелевский вектор направлен вдоль легкой оси. Если поле приложено перпендикулярно неелевскому вектору (намагниченности подрешеток), то по мере увеличения поля происходит непрерывный процесс вращения намагниченностей обеих подрешеток к направлению поля, см. рис. 8.6. Это легко показать из энергетических соображений. Энергия анизотропии одноостного кристалла имеет вид  $\Delta \sin^2(\frac{\pi}{2} - \theta) = \Delta \cos^2 \theta = const - \Delta \sin^2 \theta$ , где  $\Delta$  - константа анизотропии, а  $\theta$  - угол между внешним полем и намагниченностью. Тогда полная энергия антиферромагнетика во внешнем поле с учетом энергии взаимодействия с полем, обменной энергии и энергии анизотропии имеет вид (отличается от выражения (7.70) наличием энергии анизотропии):

$$E = -2MB \cos \theta + AM^2 \cos 2\theta - \Delta \sin^2 \theta. \quad (8.19)$$

Здесь опущены все члены, независящие от направления намагниченности. Исследуя производную этого выражения по углу  $\theta$ , получим, что равновесное направление намагниченности определяется углом

$$\cos \theta = \frac{MB}{2AM^2 + \Delta}. \quad (8.20)$$

Т.е. при приложении перпендикулярного поля намагниченность непрерывно вращается от  $\theta = \pi/2$  до  $\theta = 0$ .

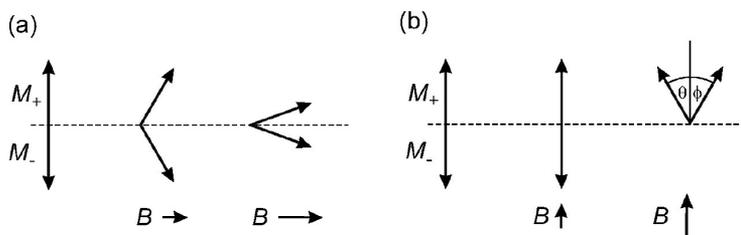


Рис. 8.6: Двухподрешеточный антиферромагнетик, легкая ось которого направлена вертикально. (а) В перпендикулярном внешнем поле его намагниченность вращается к полю непрерывно. (б) Возникновение спин-флоп фазы в параллельном поле при полях выше критического. Из книги [5].

Иная ситуация возникает в случае параллельного поля. При малых приложенных полях неелевский вектор остается параллельным полю за счет энергии анизотропии. При больших полях намагниченность перестраивается так, чтобы составлять одинаковые углы с полем, см. рис. 8.6. Это называется спин-флоп переходом. Исследуем спин-флоп переход из энергетических соображений. В антиферромагнитном состоянии  $\theta = 0$ ,  $\phi = \pi$ , а в спин-флоп состоянии  $\theta = \phi$ . Энергия системы как функция углов  $\theta$  и  $\phi$  имеет вид:

$$E = -MB \cos \theta - MB \cos \phi + AM^2 \cos(\theta + \phi) - \frac{1}{2} \Delta (\cos^2 \theta + \cos^2 \phi). \quad (8.21)$$

Сравним энергии антиферромагнитного и спин-флоп состояния:

$$E_{AF} = -AM^2 - \Delta, \quad (8.22)$$

$$E_{S-F} = -2MB \cos \theta + AM^2 \cos 2\theta - \Delta \cos^2 \theta. \quad (8.23)$$

Минимизирую энергию спин-флоп состояния по  $\theta$ , получим, что при заданном внешнем поле  $\theta$  определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{MB}{2AM^2 - \Delta}. \quad (8.24)$$

При этом значении  $\theta$  достигается минимум энергии спин-флоп фазы:

$$E_{S-F} = -AM^2 - \frac{M^2 B^2}{2AM^2 - \Delta}. \quad (8.25)$$

Из условия  $E_{S-F} < E_{AF}$  получаем, что спин-флоп фаза реализуется при полях

$$B > B_{S-F} = \sqrt{2A\Delta - (\Delta/M)^2}. \quad (8.26)$$

При этом значении поля происходит скачкообразное изменение намагниченности в системе, см. рис. 8.7(а). Дальнейшее увеличение поля приводит к постепенному вращению намагниченности к направлению поля. Намагниченность выстраивается по полю при  $B = B_2 = 2AM - \Delta/M$ . При достаточно больших значениях константы анизотропии спин-флоп фаза не возникает, а система при некотором поле скачком переключается из антиферромагнитного в ферромагнитное состояние. Это называется спин-флип (spin-flip) переход, см. рис. 8.7(б)

## 8.2 Анизотропия формы.

Поликристаллы без предпочтительной ориентации гранул не обладают магнитокристаллической анизотропией. Однако, если образец не сферический, возникает одна или

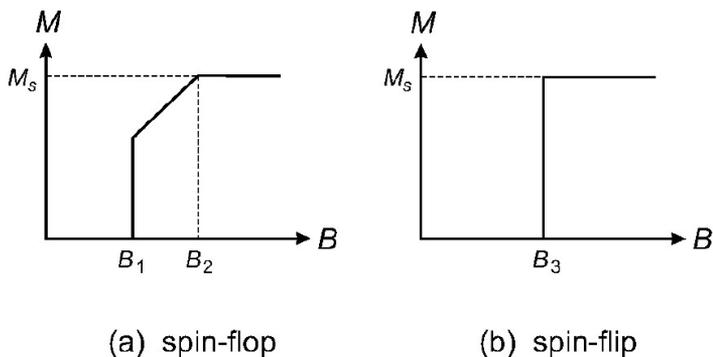


Рис. 8.7: (а) Зависимость намагниченности антиферромагнетика от приложенного поля при наличии спин-флоп фазы.  $B_1 = B_{Sf}$ . Небольшие анизотропии. (б) Зависимость намагниченности антиферромагнетика от приложенного поля при отсутствии спин-флоп фазы. Большие анизотропии. Из книги [5].

несколько легких осей, определяемых формой. Этот эффект обусловлен магнитным диполь-дипольным взаимодействием векторов намагниченности в различных частях образца. Действительно, на простейшем примере взаимодействия двух диполей

$$U = -\frac{\mu_1 \mathbf{B}_1}{2} - \frac{\mu_2 \mathbf{B}_2}{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} - \frac{3(\mu_1 \mathbf{r})(\mu_2 \mathbf{r})}{r^5} \right) \quad (8.27)$$

видно, что энергия взаимодействия зависит от взаимного расположения магнитных моментов и их ориентации относительно оси, соединяющей их. Например,  $(\mu_0/4\pi)\mu_1\mu_2/r^3$  (в нестабильной конфигурации  $\uparrow\uparrow$ ) или  $-(\mu_0/2\pi)\mu_1\mu_2/r^3$  (в стабильной конфигурации  $\rightarrow\rightarrow$ ). Для ферромагнетика, который может быть представлен как множество диполей,

энергия диполь-дипольного взаимодействия имеет вид:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} \boldsymbol{\mu}_i \mathbf{B}_i = -\frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \sum_{i \neq j} \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu}_i \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_i}{r_{ij}^3} \right). \quad (8.28)$$

Переходя в этом выражении к интегралу, получим:

$$U = -\frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{M}(\mathbf{r}) \int d^3r' \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (8.29)$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[\mathbf{M}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')](\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (8.30)$$

Это выражение содержит расходимость внутри тела, поэтому при вычислении магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  пользуются следующим приемом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} d^3r' \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_{j \in \omega} \mathbf{B}_{ij}, \quad (8.31)$$

где  $\omega$  - сфера радиуса  $R$  вокруг магнитного момента  $\mathbf{m}_i$  (сфера Лоренца), а  $\Omega$  - весь остальной объем тела без сферы Лоренца. Радиус сферы Лоренца выбирается много меньше характерного масштаба изменения намагниченности, но много больше межатомного расстояния.

В веществе  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . Из уравнения Максвелла получаем:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{H} = -\nabla \mathbf{M} = \rho_M, \quad (8.32)$$

что совместно со вторым уравнением Максвелла  $\text{rot} \mathbf{H} = 0$  определяет стандартную электростатическую задачу для

поля  $\mathbf{H}$  при заданном распределении магнитного заряда  $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ . Решение этой задачи имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{[\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (8.33)$$

Таким образом, в образце конечных размеров перестает работать объемное соотношение  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$  и на его поверхности появляются магнитные заряды, которые создают поля рассеяния вне образца и "размагничивающее" поле  $\mathbf{H}$  внутри образца, которое не сонаправлено с намагниченностью и приводит к зависимости энергии диполь-дипольного взаимодействия от направления намагниченности.

Член  $\sum_{j \in \omega} \mathbf{B}_{ij}$  в формуле (8.31) исчезает для кубической решетки, а для некубической может быть включен в магнитокристаллическую анизотропию, т.к. не зависит от формы образца. Тогда получаем, что энергия анизотропии формы имеет вид:

$$U = -\frac{\mu_0}{2} \int d^3r \mathbf{M} \mathbf{H}. \quad (8.34)$$

Все члены  $\propto \int d^3r M^2$ , а, следовательно, не зависящие от направления намагниченности образца, здесь опущены. Вычисление поля размагничивания  $\mathbf{H}$  для тел произвольной формы представляет собой довольно сложную задачу. Но для однородно намагниченных тел эллипсоидальной формы поле размагничивания также однородно и имеет вид:

$$H_i = -N_{ij} M_j, \quad (8.35)$$

где матрица  $\hat{N}$  с компонентами  $N_{ij}$  представляет собой тензор размагничивания.  $\text{Tr} \hat{N} = 1$ . Тогда энергия анизотропии формы (еще ее называют энергией рассеянных полей

или энергией диполь-дипольного взаимодействия) приобретает вид:

$$U = \frac{\mu_0}{2} \int d^3r (\mathbf{M})^T \hat{N} \mathbf{M}. \quad (8.36)$$

Энергия рассеянных полей всегда положительна. Если выбрать координатные оси вдоль главных осей эллипсоида  $a, b, c$ , то тензор размагничивания приобретет диагональный вид и энергия рассеянных полей может быть записана в виде:

$$E_{str} = U = \frac{\mu_0}{2} M^2 V \left( N_a \alpha_a^2 + N_b \alpha_b^2 + N_c \alpha_c^2 \right). \quad (8.37)$$

В случае сферы тензор размагничивания изотропен  $N_i = 1/3$  для  $i = a, b, c$  и все направления намагниченности энергетически эквивалентны.

Для эллипсоида вращения, т.е. тела, обладающего симметрией относительно вращения вокруг оси  $c$ :

$$N_a = N_b, \quad N_c = 1 - 2N_a, \quad (8.38)$$

$$E_{str} = \frac{\mu_0}{2} M^2 V \left( N_a \sin^2 \theta + (1 - 2N_a) \cos^2 \theta \right) = \frac{\mu_0}{2} M^2 V \left( N_a + (1 - 3N_a) \cos^2 \theta \right). \quad (8.39)$$

Для бесконечно длинного цилиндра  $N_a = N_b = 1/2$ ,  $N_c = 0$ .

$$E_{str} = \frac{\mu_0}{4} M^2 V \sin^2 \theta. \quad (8.40)$$

Для бесконечной плоской пластины  $N_a = N_b = 0$ ,  $N_c = 1$ .

$$E_{str} = \frac{\mu_0}{2} M^2 V \cos^2 \theta. \quad (8.41)$$

Этот результат очень важен для тонких пленок и мульти-слоев. Для них, если написать

$$E_{str} = K_0 + K_{shape} \sin^2 \theta, \quad (8.42)$$

то  $K_{shape} \propto -M^2 < 0$ . Кроме того, обычно анизотропия формы доминирует над магнитокристаллической анизотропией. Поэтому в пленках намагниченность ложится в плоскость пленки.

### 8.3 Индуцированная магнитная анизотропия.

Для магнитных сплавов, имеющих кубическую кристаллическую структуру, одноостная анизотропия может быть достигнута путем отжига в магнитном поле. Необходимыми ингредиентами для этого являются хаотическое расположение атомов различных веществ в решетке сплава и высокие критические температуры, которые позволяют атомам обмениваться местами в кристаллической решетке с помощью тепловой диффузии.

Механизм формирования индуцированной одноостной анизотропии следующий. Магнитное поле ориентирует намагниченность при  $T < T_c$ . Энергия связи двух соседних атомов в намагниченном кристалле зависит от угла между прямой, соединяющей атомы и направлением намагниченности  $E \propto l \cos^2 \phi$ , где  $\phi$  - угол между прямой, соединяющей атомы и направлением намагниченности и  $l$ -константа, зависящая от типа связи (в бинарном сплаве АА, АВ или ВВ) и температуры. Пара атомов, образующая связь стремится вытянуть ось вдоль или поперек намагниченности, в зависимости от знака  $l$ . Если температура велика, т.ч. диффузия атомов возможна, то атомы перестраиваются в поле так, чтобы минимизировать эту энергию. Этот процесс

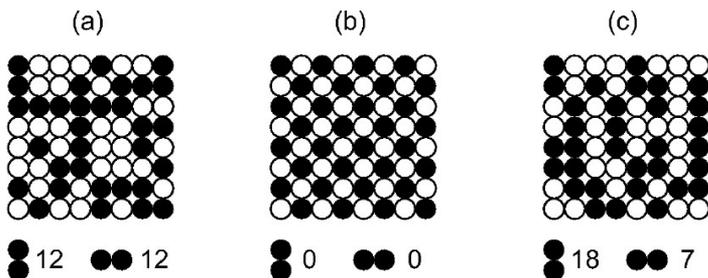


Рис. 8.8: (а) Случайное распределение атомов в бинарном сплаве; (б) идеальный изотропный дальний порядок; (с) анизотропный ближний порядок с выделенным направлением связей, сформировавшийся в результате отжига в магнитном поле. Из книги [5].

проиллюстрирован переходом от рис. 8.8(а) к рис. 8.8(с). При охлаждении в поле этот порядок замораживается, в результате чего появляется одноосная анизотропия.

## 8.4 Магнитострикция.

До сих пор кристаллическая решетка считалась жесткой. Введем упругую степень свободы.

Для кубической решетки энергия магнитокристаллической анизотропии имеет вид  $E_{crys}^{cubic} = K_1^{cubic} \cdot O(\alpha^4)$ , а для тетрагональной анизотропии  $E_{crys}^{tetra} = K_1^{tetra} \cdot O(\alpha^2) = K_1^{tetra} \sin^2 \theta$ . Как правило,  $K_1^{tetra} > K_1^{cubic}$ , поэтому деформация решетки, переводящая кристалл из кубической симметрии в тетрагональную, выгодна. Эта деформация ограничивается упругой энергией. В простейшем случае, когда деформация возможно вдоль одной оси, энергия системы, включающая вклад энергии тетрагональной магнитной анизотропии (кубической анизотропией пренебрегаем

по сравнению с тетрагональной и упругой энергии, имеет вид:

$$E = K_1 \varepsilon (1 - \alpha_3^2) + \frac{c \varepsilon^2}{2}, \quad (8.43)$$

где  $\varepsilon$  - относительное изменение длины вдоль заданного направления. При фиксированном направлении намагниченности минимум энергии системы достигается при

$$\varepsilon = -\frac{K_1}{c} (1 - \alpha_3^2). \quad (8.44)$$

Подставляя это значение в (8.43), получим:

$$E = -\frac{K_1^2}{2c} (1 - \alpha_3^2)^2, \quad (8.45)$$

т.е. магнитострикционная деформация приводит к появлению одноосной анизотропии типа легкая плоскость. В общем случае надо вводить тензор деформаций и тензор упругости. В кристалле в результате магнитострикционных деформаций может также появиться одна или несколько легких осей. Характерные значения магнитострикционной деформации имеют порядок  $\varepsilon \sim 10^{-5}$ .

## 8.5 Поверхностная анизотропия.

До сих пор все виды анизотропии были связаны с объемными свойствами кристаллов. Для низкоразмерных систем существенную роль также играет вклад в энергию анизотропии, связанный с наличием поверхности образца. В тонких пленках эффективная константа анизотропии содержит как объемный вклад, определяемый энергией анизотропии формы, так и поверхностный вклад ( $E_{an} = K_{eff} \sin^2 \theta$ ):

$$K_{eff} = K^V + 2K^S/d, \quad (8.46)$$

где  $K^V$  - константа анизотропии формы,  $K^S$  - константа поверхностной анизотропии,  $d$  - толщина пленки. При увеличении толщины пленки доля вклада поверхностной анизотропии в эффективную константу уменьшается  $\propto 1/d$ , что приводит к появлению соответствующего множителя в (8.46). Множитель 2 возникает из-за наличия 2 поверхностей у пленки.

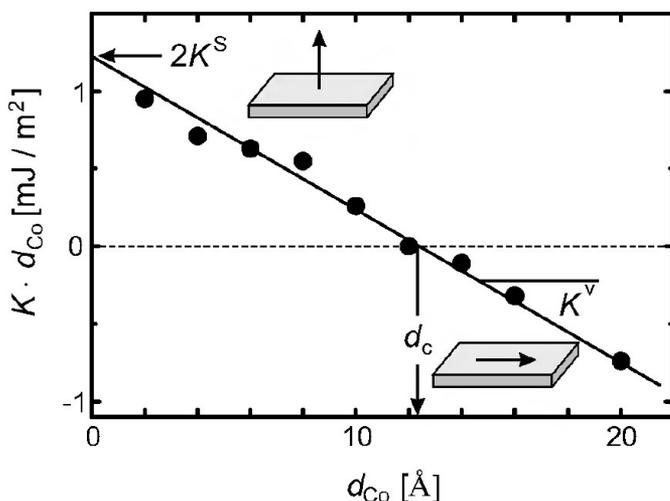


Рис. 8.9: Магнитная анизотропия в тонкой пленке Co в мильтислое Co/Pd как функция толщины пленки Co. Наклон прямой позволяет определить  $K^V$ , а аппроксимационное значение линейной функции к  $d_{Co} = 0$  дает  $2K^S$ . Из книги [5].

Физической причиной возникновения поверхностной анизотропии опять является спин-орбитальное взаимодействие. Из-за нарушения симметрии по отношению к инверсии относительно поверхности образца вблизи поверхности возникает эффективное электрическое поле, в результате чего электронные орбитали поверхностных атомов вытягивают-

ся вдоль нормали к поверхности. Это заставляет спин электронной оболочки, как правило, тоже вытянуться вдоль нормали, в результате чего  $K_S$  дает анизотропию типа легкой оси и приводит к смене равновесной ориентации намагниченности с параллельной плоскости пленки на перпендикулярную в ультратонких пленках при критической толщине пленки  $d_c = -2K^S/K^V$ , см. рис. 8.9.

## Глава 9

# Доменная структура МАГНЕТИКОВ.

Ненамагниченный ферромагнитный образец ниже  $T_c$  состоит из доменов - областей однородной намагниченности, намагниченность в каждом из которых направлена вдоль легкой оси этого домена. Намагниченность макроскопического образца, усредненная по всем доменам равна нулю. Границы между соседними доменами называются доменными стенками. Концепция доменов объясняет многие свойства магнитных материалов. Например: (i) нулевую среднюю намагниченность ненамагниченного магнетика; (ii) достаточность в магнитомягких материалах уже очень слабых магнитных полей  $B \sim 10^{-6}T$  для достижения намагниченности  $\mu_0 M \sim 1T$ . Это объясняется тем, что слабое внешнее поле не переориентирует все магнитные моменты, а только двигает доменные стенки.

## 9.1 Процесс намагничивания.

Сначала рассмотрим, как происходит процесс намагничивания образца, т.е. увеличения его средней намагниченности, параллельной полю. Он происходит в две основные стадии:

- 1) при слабых полях стадия смещения доменных границ, смещения бывают обратимые и необратимые;
- 2) при более сильных полях стадия вращения намагниченности к направлению поля, вращения также бывают обратимые и необратимые.

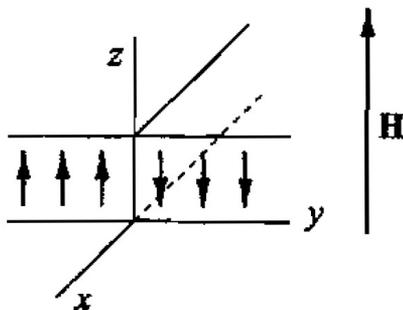


Рис. 9.1: 180-градусная доменная стенка в магнитном поле, параллельном намагниченности одного из доменов.

Рассмотрим стадию смещения доменных границ. Пусть у нас есть 180-градусная доменная стенка, см. рис. 9.1, к которой приложено магнитное поле, параллельное намагниченности одного из доменов. Тогда на стенку со стороны поля действует магнитное давление:

$$p_H = -\frac{d\Delta U}{dy}, \quad (9.1)$$

где

$$\Delta U = -2M_s H y \quad (9.2)$$

изменение энергии магнетика в поле при смещении стенки на расстояние  $y$ . Тогда

$$p_H = 2M_s H. \quad (9.3)$$

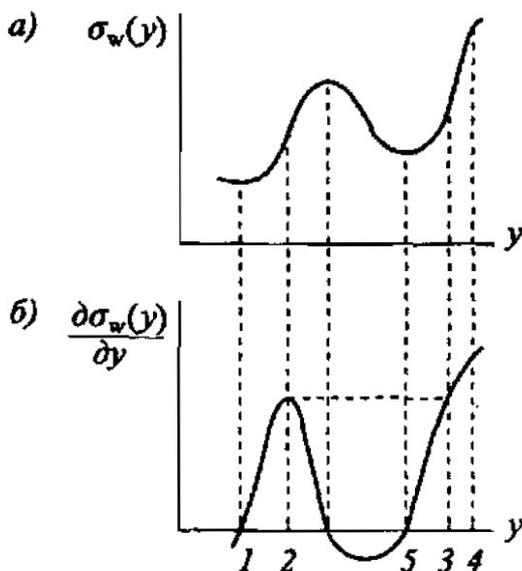


Рис. 9.2: (а) Энергия доменной стенки в зависимости от положения в образце. (б) Зависимость квазиупругой возвращающей силы, действующей на стенку, в зависимости от положения в образце. Из книги [13].

Стенка может двигаться поступательно только в полях больших некоторого критического поля, которое называется коэрцитивной силой. Это связано с тем, что из-за дефектов энергия доменной стенки зависит от ее положения в образце. Предположим, что энергия доменной стенки зависит на некотором участке только от  $y$ -координаты так, как это показано на рис. 9.2(а). Под действием магнитного давления стенка начинает смещаться, пока магнитное

давление не сравнивается с давлением квазиупругой силы. Пусть до приложения поля стенка находилась в положении 1. С ростом поля стенка обратимо смещается  $1 \rightarrow 2$ , а далее скачком переходит в положение 3. При дальнейшем увеличении поля стенка обратимо доходит до положения 4. Если в этот момент поле выключается, то она смещается в положение 5, которое отвечает нулевой квазиупругой силе и минимуму энергии.

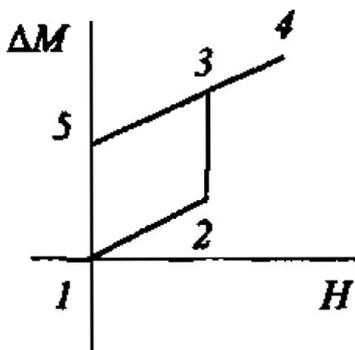


Рис. 9.3: Зависимость изменения намагниченности от поля. Из книги [13].

Изменение намагниченности, которое произошло при изменении положения стенки от 1 до 5, представлено на рис. 9.3. Произошло необратимое перемещение стенки и наблюдается гистерезис в зависимости  $M(H)$ . Таким образом, даже в слабых полях происходят необратимые смещения доменных стенок и соответствующее изменение намагниченности. Скачок из положения 2 в 3 называется скачком Баркгаузена. Профиль упругой энергии стенки в образце  $\sigma_w(y)$  может быть очень разным. Чтобы стенка могла двигаться необходимо поле, магнитное давление которого достаточно для преодоления самого высокого барьера в этом профиле.

Далее рассмотрим типичный ход зависимости магнит-

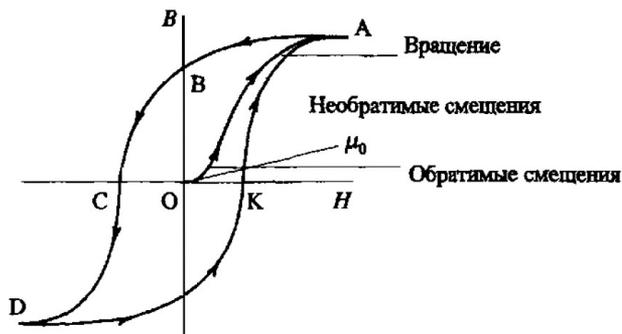


Рис. 9.4: Кривая намагничивания и перемагничивания ферромагнетика.  $OA$  - начальная кривая намагничивания. Из книги [13].

ной индукции (или намагниченности) от приложенного поля для поликристаллического образца, см. рис. 9.4. Рассмотрим кривую начального намагничивания от полностью размагниченного состояния. При очень слабых полях происходит процесс обратимого смещения доменных границ, при больших полях активно происходит процесс необратимого смещения, это наиболее крутая часть кривой  $OA$ . Этот процесс происходит до того момента, пока намагниченность каждого кристаллита не будет ориентирована по легчайшей оси кристаллита, составляющей наименьший угол с полем. После завершения процесса смещения стенок начинается процесс вращения намагниченности к направлению поля. У монокристаллов могут наблюдаться скачки необратимого вращения. При циклическом изменении поля от точки  $A$  намагниченность описывает симметричную петлю гистерезиса. Отрезок  $OC$  отвечает коэрцитивной силе. Итак, причинами гистерезиса являются необратимые смещения доменных границ и необратимые вращения намагниченности.

## 9.2 Доменные стенки.

В первую очередь доменные стенки можно классифицировать по углу, который составляют друг с другом намагниченности соседних доменов. Самые распространенные - 180-градусные и 90-градусные стенки, см. рис. 9.5. Какой тип доменной стенки реализуется - зависит от магнитокристаллической анизотропии:

1) Одноосная анизотропия. Примером является Co. - 180°-стенки.

2) Трехосный материал. Примером является Fe. У него три легкие оси вдоль [100], [010] и [001] - 180° и 90°-стенки.

3) Четырехосный материал. Примером является Ni. У него легкие оси вдоль [111] направлений - 180°, 109° и 71° стенки.

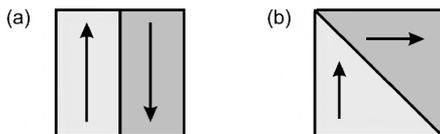


Рис. 9.5: (а) 180°-доменная стенка; (б) 90°-доменная стенка. Из книги [5].

Наиболее распространенные 180°-доменные стенки можно далее разделить на:

1) Блоховские, в которых вращение намагниченности происходит в плоскости стенки;

2) Неелевские, в которых вращение намагниченности происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости стенки.

Блоховские и неелевские стенки изображены на рис. 9.6. Блоховские стенки реализуются, в основном, в объемных

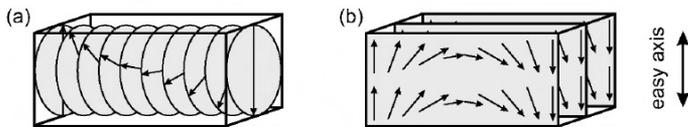


Рис. 9.6: (а) Вращение намагниченности блоховской стенки; (б) вращение намагниченности неелевской стенки. Из книги [5].

кристаллах, т.к. намагниченность, не выходящая из плоскости границы раздела доменов, минимизирует поля рассеяния. Неелевские стенки реализуются в тонких пленках, где за счет анизотропии формы намагниченности не выгодно выходить из плоскости пленки.

### 9.2.1 Ширина доменной стенки.

Рассмотрим, чем определяется ширина доменной стенки и оценим ее. В классическом пределе энергия обменного взаимодействия двух спинов имеет вид:

$$E = -2JS_1S_2 = -2JS^2 \cos \delta\varphi \approx -2JS^2 + JS^2\delta\varphi^2. \quad (9.4)$$

Последнее приближенное равенство, разумеется, справедливо, если угол между двумя спинами  $\delta\varphi \ll 1$ . Пусть в перевороте намагниченности на  $\pi$  участвуют  $N$  спинов. Тогда  $\delta\varphi = \pi/N$ . На переворот одного спина на  $\pi$  за  $N$  шагов приходится энергия

$$E = NJS^2\delta\varphi^2 = \pi^2JS^2/N. \quad (9.5)$$

На единицу площади стенки приходится  $1/a^2$  спинов, где  $a$  - решеточная постоянная. Поэтому обменный вклад в энергию стенки на единицу площади стенки имеет вид:

$$E_{ex}^w = \frac{\pi^2JS^2}{Na^2}. \quad (9.6)$$

Эта энергия стремится растянуть стенку, ее минимум достигается при  $N \rightarrow \infty$ . Однако, надо учесть еще энергию магнитокристаллической анизотропии, которая стремится сократить стенку. Результатом конкуренции этих двух факторов и определяется итоговая ширина стенки. Энергия магнитокристаллической (одноосной) анизотропии на единицу объема материала имеет вид:

$$E_{crys} = K \sin^2 \varphi, \quad (9.7)$$

где  $\varphi$  - полный угол отклонения данного спина от оси анизотропии. Тогда полная энергия кристаллической анизотропии, просуммированная по всей стенке, на единицу площади стенки:

$$E_{crys}^w = \sum_1^N K a \sin^2 \varphi = \int_0^\pi \frac{a d\varphi N}{\pi} K \sin^2 \varphi = \frac{a}{2} N K. \quad (9.8)$$

Полная энергия стенки дается суммой обменного вклада и вклада анизотропии  $E^w = E_{ex}^w + E_{crys}^w$ . Минимизируя эту энергию по числу спинов  $N$ , вовлеченных в формирование стенки, получим

$$\frac{dE}{dN} = 0 \implies \frac{1}{2} a K - JS^2 \frac{\pi^2}{a^2 N^2} = 0, \quad (9.9)$$

откуда следует

$$N = \pi S \sqrt{\frac{2J}{a^3 K}}. \quad (9.10)$$

Введем параметр  $A = 2JS^2/a$ , который называется обменная жесткость и представляет собой меру жесткости обменных сил при повороте намагниченности. Тогда ширину доменной стенки можно представить в виде:

$$\delta = Na = \pi \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (9.11)$$

Видно, что, действительно, обменные силы стремятся растянуть доменную стенку, а энергия анизотропии - сжать. Характерные масштабы ширины блоховских доменных стенок порядка нескольких десятков нанометров (для Fe  $\sim 40nm$ ). Ширина неелевской доменной стенки в тонких пленках может быть больше, вплоть до  $1\mu m$  из-за слабости константы одноосной анизотропии.

## 9.3 Структура доменов.

### 9.3.1 Оценка ширины домена.

Теперь оценим ширину самого магнитного домена. Для простоты рассмотрим домены в форме параллельных слоев. Пусть  $d$  - ширина домена. Она опять определяется конкуренцией двух энергий. На краях магнетика из него выходит рассеянное магнитное поле, см. рис. 9.7. Для минимизации этих полей, а значит и их энергии, ширину домена необходимо уменьшать. С другой стороны, с каждой доменной границей связана положительная энергия, что действует, наоборот, в сторону уменьшения числа доменов и, соответственно, увеличения ширины каждого домена. Конкуренция этих факторов стабилизирует конечную ширину домена. Сделаем количественные оценки.

Подставляя  $Na$  из (9.11) в выражение для энергии доменной стенки, получим для энергии поверхностного натяжения доменной стенки

$$E^w = \sigma_b = \pi\sqrt{AK} = M^2\Delta, \quad (9.12)$$

где  $\Delta = \pi\sqrt{AK/M^4}$ . Тогда полная энергия всех доменных границ в образце шириной  $L$

$$E_b = \sigma_b \frac{L}{d} = M^2\Delta \frac{L}{d}. \quad (9.13)$$

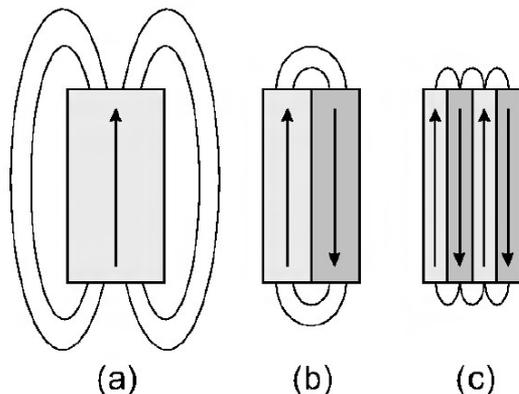


Рис. 9.7: Распределение рассеянных полей в пространстве. (a) Однодоменный образец; (b) тот же образец в двухдоменном состоянии; (c) многодоменное состояние. Из книги [5].

Энергия же выхода рассеянных полей имеет порядок величины

$$E_{str} = \kappa M^2 d, \quad (9.14)$$

где  $\kappa$  - некоторый коэффициент порядка 1. Эта простая оценка получается как энергия магнитных зарядов с поверхностной плотностью  $\sigma \sim M$ , распределенных на поверхности магнетика  $E_{str} \sim \sigma \varphi$ , где потенциал поля магнитных зарядов  $\varphi \sim Md$ .

Минимизируя суммарную энергию  $E = E_b + E_{str}$  по  $d$ , получим:

$$d = \sqrt{\Delta L / \kappa}. \quad (9.15)$$

Таким образом, ширина доменов растет с увеличением размеров тела как  $\sqrt{L}$ . Но этот закон заведомо не может быть справедливым при сколь угодно больших значениях  $L$ . Ши-

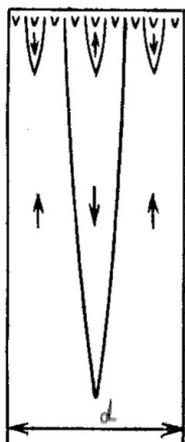


Рис. 9.8: Схематичное изображение процесса разветвления домена у поверхности образца.

рина доменов при их выходе на поверхность не может превышать некоторого предельного значения, которое определяется только свойствами самого ферромагнетика и не зависит от формы и размеров образца. Оно определяется моментом, когда по мере увеличения  $d$  термодинамически выгодным становится расщепление домена на глубину порядка  $d$ . Такой момент обязательно наступает с ростом  $d$ , т.к. энергия выхода одного домена растет как  $d^2$ , а энергия поверхностного натяжения доменной границы как  $d$ . Т.о. по мере увеличения размеров тела должно наступать прогрессирующее разветвление доменов при их подходе к поверхности. При достаточно больших размерах тела ветвление продолжается до тех пор, пока ширина образовавшихся у самой поверхности доменов не станет сравнима с шириной доменной стенки, см. рис. 9.8.

## 9.4 Реальная структура доменов.

1. Кристаллы с сильной одноостной анизотропией демонстрируют ветвление доменов у поверхности в соответствии с теорией, описанной в предыдущем пункте, см. рис. 9.9-9.10.

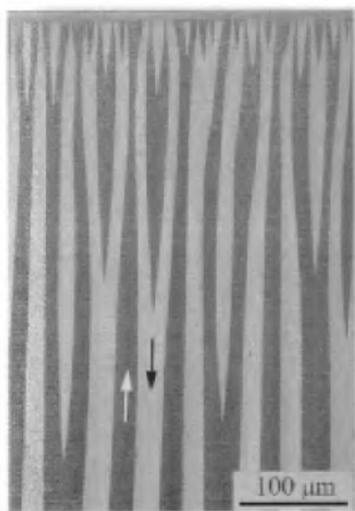


Рис. 9.9: Домены на боковой поверхности кристалла  $\text{Co}$ . Из книги [5].

2. Кристаллы со слабой одноостной анизотропией образуют на поверхности замыкающие домены, см. рис. 9.11, в которых намагниченность вблизи поверхности не совпадает с легкой осью, а располагается параллельно поверхности для минимизации энергии рассеянных полей.

3. В кристаллах с неодностной анизотропией детальная доменная картина зависит от ориентации поверхности по отношению к легким осям. Если переходить от простейшего случая поверхности кристалла, совпадающей с одной из кристаллических плоскостей и содержащей две легкие оси к поверхности, ориентированной под большим углом к кри-

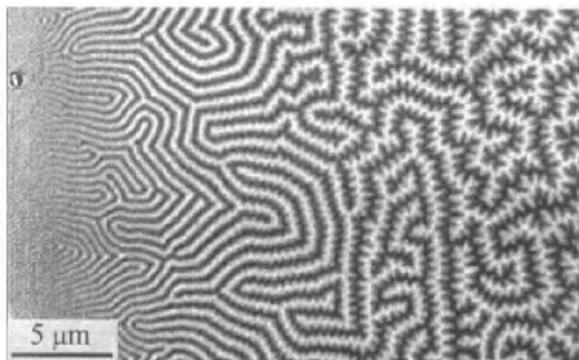


Рис. 9.10: Доменная структура клиновидной пленки монокристаллического Co. Легкая ось направлена перпендикулярно поверхности пленки. Толщина пленки увеличивается слева направо. Видно, что при этом размер домена растет в соответствии с теорией, изложенной выше, но и степень ветвления доменов у поверхности также растет. Из книги [5].

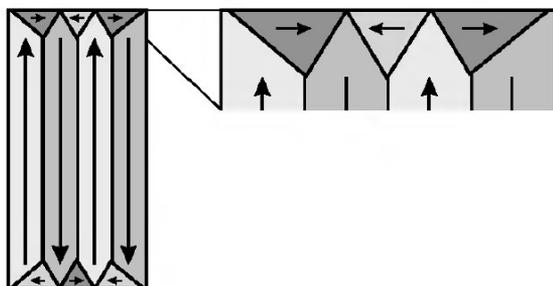


Рис. 9.11: Замыкающие домены на поверхности кристалла со слабой одноосной анизотропией, в которых намагниченность не параллельна легкой оси для минимизации энергии рассеянных полей. Из книги [5].

сталлическим плоскостям, доменная структура становится все более и более сложной. Рассмотрим примеры.

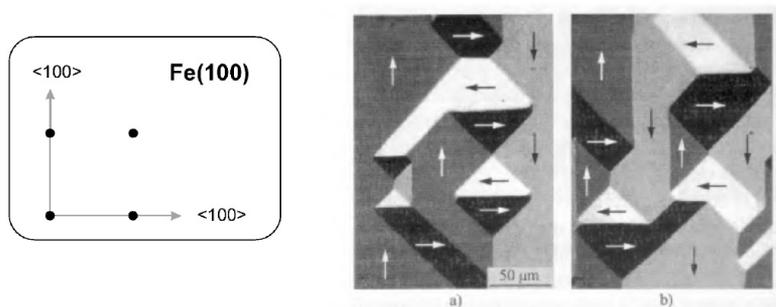


Рис. 9.12: Доменная структура на (100)- поверхности Fe. Все домены намагничены вдоль одной из двух легких осей, лежащих в плоскости поверхности. (b) Тот же образец после следующего размагничивания. Из книги [5].

а) Две легкие оси в плоскости поверхности. Эта ситуация возникает, например, для (100)- поверхностей Fe, см. рис. 9.12. Картина легко интерпретируется - намагниченность в доменах направлена по одной из двух легких осей, лежащих в плоскости поверхности. Локально в каждом месте образца есть слегка выделенное направление из-за локальных натяжений или индуцированной анизотропии. После полного размагничивания и последующего намагничивания, см. рис. 9.12(b), доменная структура несколько меняется, но предпочтительные направления сохраняются.

б) Одна легкая ось в плоскости поверхности. Эта ситуация возникает, например, для (110)- поверхностей Fe, см. рис. 9.13. Доменная структура состоит из доменов, вытянутых вдоль легкой оси.

с) Слегка разориентированная поверхность, т.е. когда ближайшая легкая ось составляет угол не больше  $5^\circ$  с плоскостью поверхности. Основная доменная структура соот-

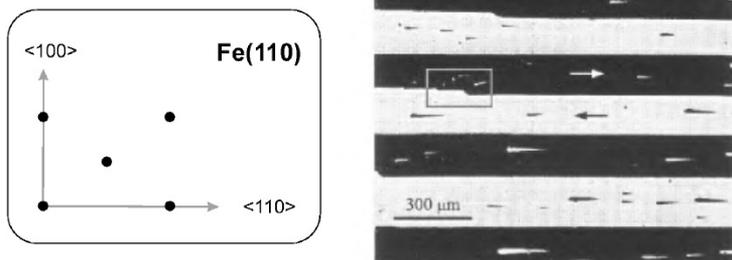


Рис. 9.13: Доменная структура на (110)- поверхности Fe. Все домены намагничены вдоль легкой оси, лежащей в плоскости поверхности. Из книги [5].

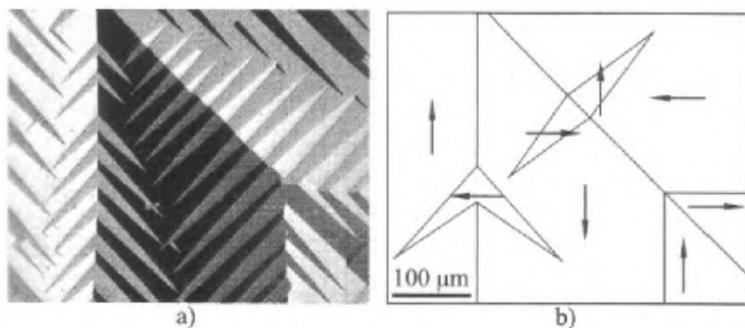


Рис. 9.14: Доменная структура "елочка" с теньевыми доменами на слегка разориентированной поверхности Fe. Из книги [5].

ветствует идеальному кристаллу. Но на нее накладываются "теньевые домены" в которых намагниченность располагается вдоль другой легкой оси, см. рис. 9.14.

d) Сильно разориентированная с легкими осями поверхность. В этом случае доменная структура очень сложна, см. рис. 9.15.

4. Доменная структура магнитомягкого материала без

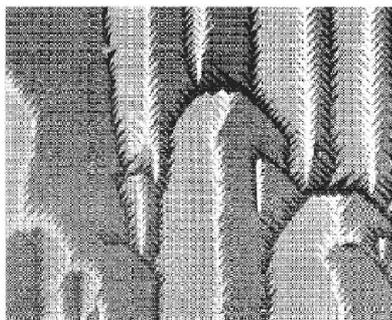


Рис. 9.15: Доменная структура на сильно разориентированной поверхности Fe. Из книги [5].

магнитокристаллической анизотропии определяется формой образца. Она строится таким образом, чтобы минимизировать появление магнитных зарядов на поверхности образца. Для исчезновения магнитных зарядов надо выполнить следующие требования:

1)  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$  - отсутствие объемных магнитных зарядов в образце;

2) намагниченность должна быть ориентирована параллельно поверхностям образца для того, чтобы избежать появления поверхностных зарядов.

Рассмотрим образец прямоугольной формы. Из рис. 9.16(a) видно, что непрерывное поле намагниченности не удовлетворяет всем этим требованиям. Оно является бездивергентным в объеме, но намагниченность не лежит параллельно *всей* поверхности образца. Все условия выполняются для так называемого состояния Ландау, см. рис. 9.16(b). Намагниченность в этом состоянии имеет разрывы, которые являются доменными стенками. Намагниченность параллельна всей поверхности образца и на границах доменов перпендикулярная поверхности компонента намагниченности остается непрерывной, что обеспечивает отсут-

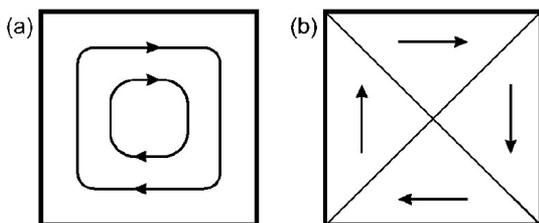


Рис. 9.16: (а) Состояние квадратного образца с непрерывной намагниченностью. (б) Состояние Ландау с 4 доменами и  $90^\circ$ -ными доменными стенками. Из книги [5].

ствие магнитных зарядов на этих границах.

Можно сформулировать правила построения доменной структуры, которая зануляет магнитные заряды, для частицы произвольной формы:

1) Надо построить окружности, которые лежат внутри образца и касаются поверхности в двух или больше точках. Центры этих окружностей лежат на доменной стенке;

2) В каждой окружности вектор намагниченности перпендикулярен радиусу касания;

3) Если окружность касается поверхности более чем в двух точках, ее центр представляет собой точку слияния доменных стенок;

Эти правила проиллюстрированы на рис. 9.17(а)

4) Если окружность совпадает с поверхностью в определенной области, то доменная стенка заканчивается в ее центре и он служит центральной точкой домена с непрерывным вращением намагниченности. Это правило проиллюстрировано на рис. 9.17(б);

5) Если образец содержит острие, то доменная стенка продлевается до него, см. рис.9.17(с).

Вышеизложенные правила приводят к состоянию, в ко-

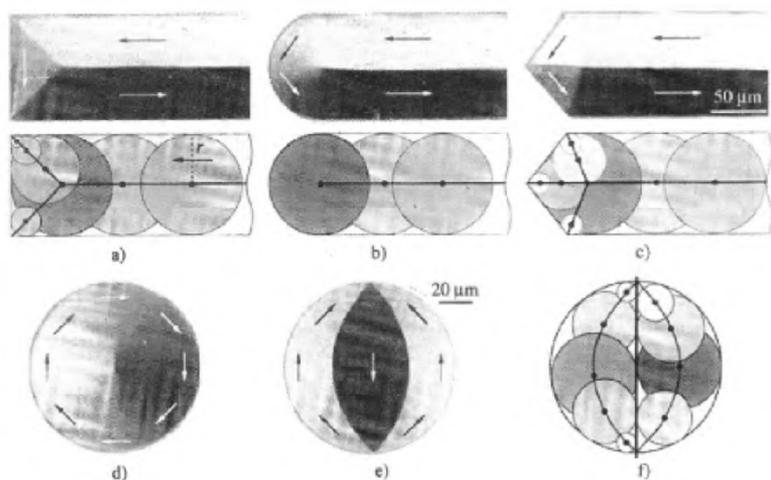


Рис. 9.17: Доменная структура магнитомягких элементов различной формы. Для описания рисунков (a)-(c) см. текст. Рисунки (d)-(e) отвечают возможным стабильным и метастабильным состояниям дискообразной частицы. (d) - магнитный вихрь; (e) - доменное состояние, которое получается применением алгоритма, изложенного в тексте, но с дополнительным мысленным разрезом образца посередине, как это показано на рис. (f). Из книги [5].

тором минимизирована энергия рассеянных полей. Как правило это состояние является наиболее выгодным для образцов достаточно больших размеров, когда проигрыш в энергии образования доменных стенок компенсируется выигрышем в минимизации энергии рассеянных полей. Однако, если размер магнитной частицы уменьшается, то образование доменных стенок в ней становится невыгодным, т.к. энергия полей рассеяния слишком мала (вспомним, что энергия доменной стенки растет как размер образца, а энергия рассеянных полей как квадрат размера образца). Поэтому, при понижении размера образцу становится вы-

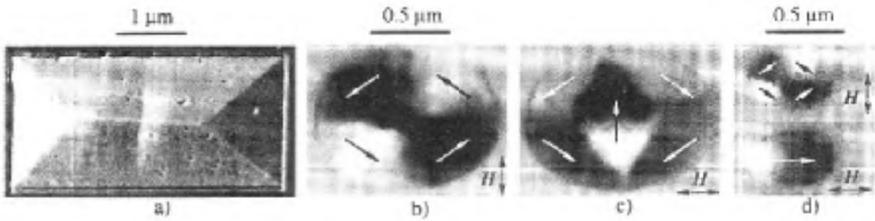


Рис. 9.18: (а) Образец прямоугольной формы. (b)-(d) Эллиптические частицы  $S_0$  разного размера. Для частиц большего размера реализуется состояние с концентрической намагниченностью и доменными стенками (b), построенное в согласии с алгоритмом, изложенным в тексте, или трехдоменное состояние (c). Для частиц меньшего размера образование доменных стенок не выгодно и реализуется однодоменное состояние в параллельном поле или концентрическое состояние (как метастабильное) в перпендикулярном поле. Из книги [5].

годно перейти в однодоменное состояние. Этот процесс проиллюстрирован экспериментальными результатами, представленными на рис. 9.18.



# Глава 10

## Динамика намагниченности.

Здесь мы будем изучать динамику намагниченности магнетика, которая может быть вызвана приложенным внешним полем, а также собственные моды ферро-, ферри- и антиферромагнетиков.

### 10.1 Уравнение Ландау - Лифшица - Гильберта.

Намагниченность единицы объема определяется как

$$\mathbf{M} = -\gamma \frac{\hbar \mathbf{S}}{a^3} = M_s \mathbf{m}, \quad (10.1)$$

где  $\gamma > 0$  - это гиромагнитное отношение,  $S$  - величина спина,  $a$  - решеточная постоянная. Далее мы будем использовать единичный вектор  $\mathbf{m} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , направленный вдоль намагниченности и модуль намагниченности, равный намагниченности насыщения  $M_s$ .

Уравнение движения свободного магнитного диполя можно получить из второго закона Ньютона:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \boldsymbol{\tau} \quad (10.2)$$

где  $\mathbf{J}$  - угловой момент и  $\boldsymbol{\tau}$  - момент силы. Подставляя  $\boldsymbol{\mu} = -\gamma \mathbf{J}$  и  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ , получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial t} = -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (10.3)$$

Магнитный диполь прецессирует вокруг магнитного поля. Если присутствует какая-либо форма диссипации, то диполь будет постепенно приближаться к направлению поля, т.к. это направление отвечает минимуму энергии, отсутствию прецессии и диссипации.

В твердом теле магнитные диполи не являются свободными, а участвуют в обменном, диполь-дипольном взаимодействии и подвергаются воздействию магнитокристаллической анизотропии. Однако, как и свободные диполи, в равновесии они будут стремиться к минимуму энергии. Магнитная энергия, состоящая из обменного вклада, вклада энергии анизотропии и энергии размагничивания (анизотропия формы) в приближении сплошной среды для намагниченности имеет вид:

$$E = E_{ex} + E_{an} + E_{dem} = \int d^3 \mathbf{r} A \sum_i (\nabla m_i)^2 - \int d^3 r K_u (\mathbf{m} \mathbf{e}_u)^2 - \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{H}_{dem} \mathbf{M}, \quad (10.4)$$

где предполагается одноосная анизотропия кристалла с легкой осью вдоль оси  $\mathbf{e}_u$  и поле размагничивания  $\mathbf{H}_{dem} = -\hat{N} \mathbf{M}$  может быть выражено через тензор размагничивания.

## 10.1 Уравнение Ландау - Лифшица - Гильберта 149

Покажем, как выражение для обменного вклада в энергию в приближении сплошной среды получается из классической версии гамильтониана Гейзенберга:

$$E_{i,j} = -J\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j, \quad (10.5)$$

Используя модуль спина  $S$  и единичные вектора  $\mathbf{n}_i = \mathbf{S}_i/S$  и  $\mathbf{n}_j = \mathbf{S}_j/S$  его можно переписать как

$$E_{ij} = -JS^2\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j = -JS^2\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j)^2\right]. \quad (10.6)$$

Обменная энергия ферромагнетика получается суммированием этого выражения по всем парам спинов:

$$E_{ex} = -\sum_{ij} J_{ij}S^2\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j)^2\right]. \quad (10.7)$$

Далее это выражение можно переписать в терминах непрерывной намагниченности  $\mathbf{m}$ :

$$E_{ex} = -\sum_{ij} J_{ij}S^2\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j = -\int d^3\mathbf{r} \sum_i A_i\mathbf{m}(\mathbf{r})\mathbf{m}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}_i), \quad (10.8)$$

где  $A_i$  и  $\Delta\mathbf{r}_i$  зависят от конкретной кристаллической структуры. Подставляя  $\mathbf{m}(\mathbf{r})\mathbf{m}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}_i) = 1 - \frac{1}{2}[\mathbf{m}(\mathbf{r}) - \mathbf{m}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}_i)]^2 \approx 1 - \frac{1}{2}\sum_k (\Delta\mathbf{r}_i\nabla m_k)^2$  в выписанное выше уравнение, получим:

$$E_{ex} = C + \int d^3\mathbf{r} \sum_{ijk} A_{jk} \frac{\partial m_i}{\partial x_j} \frac{\partial m_i}{\partial x_k}, \quad (10.9)$$

где  $C$  является результатом интегрирования постоянного члена и может быть опущено, а  $A_{jk}$  - это матрица констант обменной жесткости. Поворотом системы координат эту матрицу можно диагонализировать, что дает

$$E_{ex} = \int d^3\mathbf{r} \sum_{ij} A_j \left(\frac{\partial m_i}{\partial x_j}\right)^2, \quad (10.10)$$

где  $A_j$  - положительны. В случае кубических и изотропных материалов это выражение сводится к

$$E_{ex} = \int d^3\mathbf{r} A \sum_i (\nabla m_i)^2. \quad (10.11)$$

Варьированием магнитной энергии (10.4) по намагниченности получаем эффективное поле, действующее на намагниченность в данной точке пространства.  $\mathbf{H}_{eff} = -(\delta E / \delta \mathbf{M})$ . В равновесии намагниченность направлена вдоль этого поля. При выводе системы из равновесия эффективное поле будет создавать вращательный момент  $-\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}$ , действующий на намагниченность. Этот вращательный момент вызывает динамику намагниченности. При наличии внешнего поля, оно также включается в  $\mathbf{H}_{eff}$ .

Макроскопическая динамика намагниченности связана с тепловым движением магнов, электронов проводимости и фононов. Из-за этого возникает затухание динамики намагниченности и кинетическая энергия преобразуется в тепло. Вывод членов, описывающих эти процессы затухания, из первых принципов обычно достаточно сложен. Однако, член, описывающий затухание, может быть введен в уравнение магнитной динамики феноменологически. Наиболее часто используемая модель - затухание Гильберта. Это вязкое трение, в котором сила трения пропорциональна скорости изменения намагниченности  $\alpha \partial \mathbf{M} / \partial t$ . Вращательный момент, создаваемый силой вязкого трения должен быть направлен к направлению эффективного поля. Поэтому в данной модели уравнение магнитной динамики имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (10.12)$$

Это уравнение называется уравнением Ландау-Лифшица-Гильберта (LLG) и является основным уравнением, исполь-

зучаемым для описания магнитной динамики в различных системах.  $\alpha$  - параметр гильбертовского затухания.

## 10.2 Динамика намагниченности в постоянном внешнем поле. Переворот намагниченности приложенным полем.

Предположим, что эффективное поле, действующее на намагниченность, определяется только приложенным внешним полем  $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ . Тогда в случае отсутствия затухания  $\alpha = 0$  уравнение LLG может быть расписано в координатах следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\gamma M_y H \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma M_x H \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{10.13}$$

Решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям  $\mathbf{M} = (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0)$ , имеет вид (естественно, берется действительная часть от приведенных выражений):

$$\begin{aligned}M_x &= M_s \sin \theta_0 e^{i\omega_0 t}, \\ M_y &= M_s \sin \theta_0 e^{i(\omega_0 t - \pi/2)}, \\ M_z &= \cos \theta_0,\end{aligned}\tag{10.14}$$

где  $\omega_0 = \gamma H$ . Т.е. при отсутствии затухания намагниченность прецессирует вокруг поля. Поле не может повернуть намагниченность к себе.

Теперь учтем процессы затухания. Уравнение LLG (10.12) можно разрешить относительно производной  $d\mathbf{M}/dt$ . Проделав это и расписав полученные уравнения в координатах, получим:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\frac{\omega_0}{1+\alpha^2}M_y - \frac{\omega_0\alpha}{1+\alpha^2}\frac{M_xM_z}{M_s} \\ \frac{dM_y}{dt} &= \frac{\omega_0}{1+\alpha^2}M_x - \frac{\omega_0\alpha}{1+\alpha^2}\frac{M_yM_z}{M_s} \\ \frac{dM_z}{dt} &= \frac{\omega_0\alpha}{1+\alpha^2}M_s - \frac{\omega_0\alpha}{1+\alpha^2}\frac{M_z^2}{M_s}.\end{aligned}\quad (10.15)$$

Решение этой системы имеет вид прецессирующей намагниченности, которая одновременно скручивается к направлению поля, см. рис. 10.1. Если приложенное поле противоположно начальному направлению намагниченности, то мы получаем задачу о перевороте намагниченности полем. Характерное время  $\tau$  этого переворота к полю выражается как  $\tau = (1 + \alpha^2)/(\alpha\omega_0)$ . В предельных случаях большого и малого затухания время переворота становится большим. Минимальное время переворота достигается при  $\alpha = 1$  и равно  $\tau_{min} = 2/\omega_0$ . При наличии магнитной анизотропии в качестве характерного поля в частоте  $\omega_0$  выступает поле анизотропии, а типичные характерные частоты переворота намагниченности имеют порядок ГГц.

## 10.3 Ферромагнитный резонанс.

### 10.3.1 Рассмотрение без учета диссипации энергии.

Итак, мы видели, что приложение постоянного внешнего поля  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$  вызывает прецессию однородной намагниченности как целого. Частота этой прецессии  $\omega_0 = \gamma H$ .

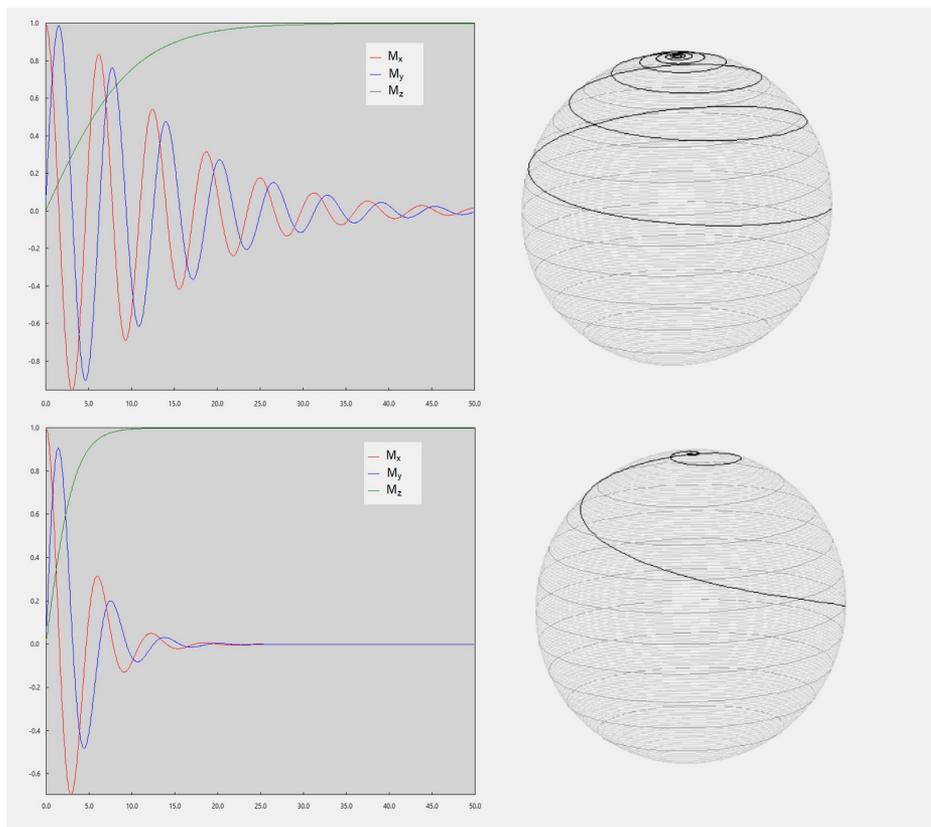


Рис. 10.1: Прецессирующая намагниченность, поворачивающаяся к полю при наличии затухания. Начальное положение намагниченности до приложения поля - в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Верхняя панель -  $\alpha = 0.1$ , нижняя панель -  $\alpha = 0.3$ .

При наличии затухания намагниченность разворачивается по полю за несколько наносекунд. Для поддержания прецессии можно приложить дополнительное переменное поле  $\mathbf{h}e^{i\omega t}$  в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Сначала рассмотрим случай отсутствия затухания  $\alpha = 0$ . Пусть  $h \ll H$ , тогда  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M}e^{i\omega t}$  ( $\mathbf{M}_0 = M_s\mathbf{e}_z$ ) и можно считать

$\delta \mathbf{M} \ll M$ . Подставляя поле и намагниченность в таком виде в уравнение LLG и сохраняя только члены первого порядка по  $\mathbf{h}$  и  $\delta \mathbf{M}$ , получим:

$$i\omega \delta \mathbf{M} + \gamma \delta \mathbf{M} \times \mathbf{H} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}. \quad (10.16)$$

В проекциях на оси координат уравнение (10.16) имеет вид:

$$\begin{aligned} i\omega \delta M_x + \gamma H \delta M_y &= \gamma M_0 h_y, \\ i\omega \delta M_y - \gamma H \delta M_x &= -\gamma M_0 h_x, \\ i\omega \delta M_z &= 0. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta M_x &= \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + i \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \\ \delta M_y &= -i \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \\ \delta M_z &= 0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Введем обозначения:

$$\chi = \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi_a = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.19)$$

Тогда решения (10.18) можно записать в тензорном виде:

$$\delta \mathbf{M} = \hat{\chi} \mathbf{h}, \quad (10.20)$$

где  $\hat{\chi}$  - тензор магнитной восприимчивости:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Из (10.21) видно, что переменное поле, параллельное постоянному не создает переменной намагниченности, а перпендикулярное постоянное - создает. Причем создаваемая

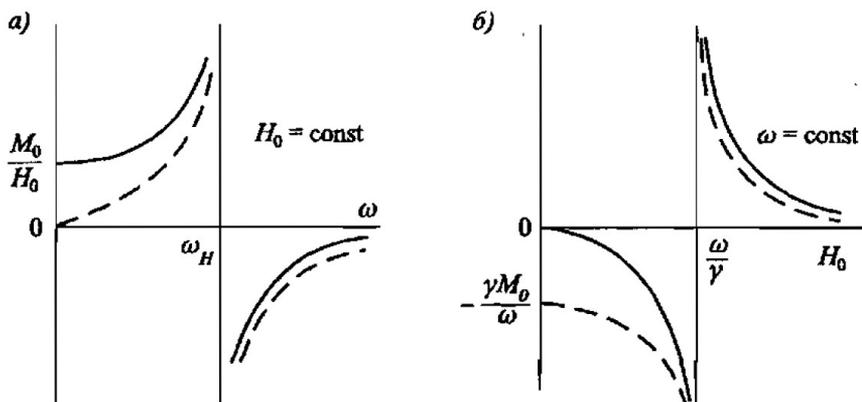


Рис. 10.2: Зависимости компонент тензора магнитной восприимчивости  $\chi$  (сплошные линии) и  $\chi_a$  (пунктирные линии) как функции (а) частоты переменного поля  $H$  и (б) величины постоянного поля. Из книги [13].

намагниченность имеет как параллельную приложенному переменному полю компоненту, так и перпендикулярную, которая сдвинута по фазе на  $\pi/2$ . Такое свойство называется гиротропией, а среда, обладающая таким свойством - гиротропной. Также видно, что зависимость восприимчивости от поля имеет резонансный характер, резонанс происходит при совпадении частот переменного поля и прецессии намагниченности  $\omega_0$ , см. рис. 10.2(а). Это явление называется ферромагнитным резонансом (ФМР). Т.к. резонансная частота пропорциональна приложенному постоянному полю, то при снятии экспериментальных зависимостей удобнее исследовать резонанс в зависимости от постоянного поля, а не от частоты переменного поля, см. рис. 10.2(б).

Рассмотрим теперь взаимодействие ферромагнетика со

слабым циркулярным полем

$$\begin{aligned} h_+ &= h_x + ih_y, \\ h_- &= h_x - ih_y, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где знаки + и - соответствуют правому и левому вращению вектора  $\mathbf{h}$ . Переменную составляющую намагниченности  $\delta M$  также можно искать в виде

$$\begin{aligned} \delta M_+ &= \delta M_x + i\delta M_y, \\ \delta M_- &= \delta M_x - i\delta M_y. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Выражая  $\delta M_{x,y}$  через  $h_{x,y}$  из (10.18), получим

$$\delta M_{\pm} = \chi_{\pm} h_{\pm}, \quad (10.24)$$

где

$$\chi_{\pm} = \chi \pm \chi_a = \frac{\gamma M_0}{\omega_0 \mp \omega}. \quad (10.25)$$

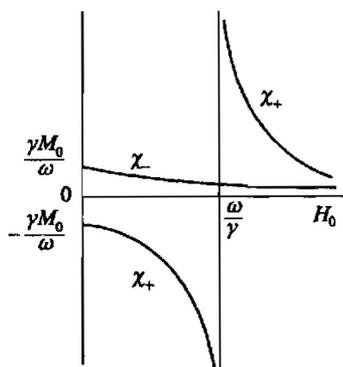


Рис. 10.3: Зависимости  $\chi_+$  и  $\chi_-$  от постоянного магнитного поля. Из книги [13].

Таким образом, в случае циркулярной поляризации приложенного переменного поля тензор восприимчивости имеет только диагональные компоненты. Их зависимости от

постоянного поля  $H$  приведены на рис. 10.3. Видно, что резонансный характер имеет только  $\chi_+$ , т.е. резонанс возбуждается только той компонентой поля, направление циркуляции которой совпадает с направлением прецессии намагниченности. Заметим, что круговая поляризация с правым вращением отвечает  $h_y = -ih_x$ .

### 10.3.2 Учет диссипации энергии.

Опять линеаризуем уравнение LLG (10.12) по малым  $\mathbf{h}$  и  $\delta M$ , но теперь не считаем  $\alpha = 0$ . Тогда вместо уравнения (10.16) получаем

$$i\omega\delta\mathbf{M} + \gamma\delta\mathbf{M} \times \mathbf{H} + \frac{i\omega\alpha}{M_0}\delta\mathbf{M} \times \mathbf{M}_0 = -\gamma\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}. \quad (10.26)$$

Сравнивая это уравнение с (10.16), замечаем, что они эквивалентны с точностью до замены  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + i\alpha\omega$ . Поэтому для восприимчивостей получаем из (10.19):

$$\begin{aligned} \chi &= \chi' - i\chi'' = \frac{\gamma M_0(\omega_0 + i\alpha\omega)}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_0}, \\ \chi_a &= \chi'_a - i\chi''_a = \frac{\gamma M_0\omega}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_0}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

При наличии затухания восприимчивости получаются комплексными и их действительные и мнимые части имеют вид:

$$\begin{aligned} \chi' &= D^{-1}\gamma M_0\omega_0[\omega_0^2 - (1 - \alpha^2)\omega^2], \\ \chi'' &= D^{-1}\alpha\gamma M_0\omega[\omega_0^2 + (1 + \alpha^2)\omega^2], \\ \chi'_a &= D^{-1}\gamma M_0\omega[\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2], \\ \chi''_a &= D^{-1}2\alpha\gamma M_0\omega^2\omega_0, \end{aligned} \quad (10.28)$$

где  $D = [\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2]^2 + 4\alpha^2\omega^2\omega_0^2$ . Мнимая часть восприимчивости определяет потери энергии на диссипацию

в магнитной системе. Действительно, мощность, поглощаемую единицей объема вещества из-за динамики намагниченности, можно найти как (будем для краткости выкладок считать, что переменное поле направлено по оси  $x$ ):

$$P = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{H} \frac{d\mathbf{M}}{dt} =$$

$$-\frac{\omega}{T} \int_0^T h_x \cos \omega t \left( \sin \omega t \operatorname{Re}[\delta M_x] + \cos \omega t \operatorname{Im}[\delta M_x] \right) dt =$$

$$\frac{1}{2} \omega h_x^2 \chi''.$$
(10.29)

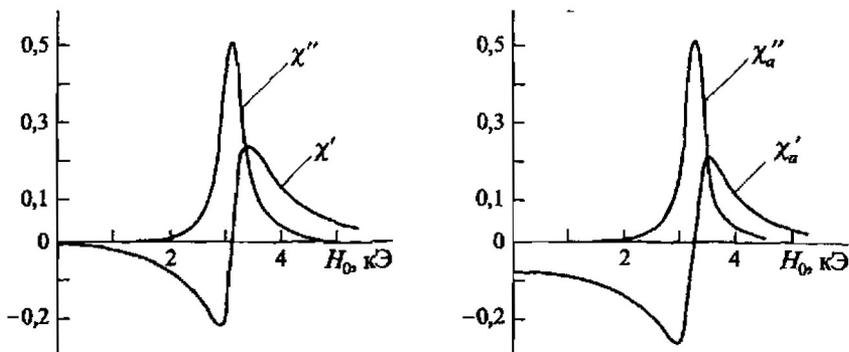


Рис. 10.4: Зависимости вещественных и мнимых компонент тензора восприимчивости от постоянного поля. Из книги [13].

Графики зависимости вещественных и мнимых частей восприимчивости от внешнего приложенного поля приведены на рис. 10.4. Вещественные части восприимчивости при резонансе меняют знак, а мнимые проходят через максимум при  $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + \alpha^2}$ , которая не сильно отличается

от резонансной частоты при малых  $\alpha$ . В точке резонанса

$$\begin{aligned}\chi'_{res} &= \frac{\gamma M_0}{2\omega_0}, & \chi''_{res} &= \frac{\gamma M_0}{2\alpha\omega_0}, \\ \chi'_{a,res} &= 0, & \chi''_{a,res} &= \frac{\gamma M_0}{2\alpha\omega_0}.\end{aligned}\quad (10.30)$$

Чем меньше затухание  $\alpha$ , тем выше и уже максимумы  $\chi''$ . Обычно кривые  $\chi''$  характеризуют полушириной  $\Delta\omega = \gamma\Delta H$ . У хороших кристаллов иттрий-железистого граната ( $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ )  $\Delta H \approx 0.2\text{Э}$  при  $H = 10^4\text{Э}$ . у ферритов-шпинелей  $\Delta H$  может достигать сотен Э.

### 10.3.3 Учет размагничивающего поля (анизотропии формы).

С учетом анизотропии формы постоянная компонента поля  $\mathbf{H}_{eff}$ , входящего в уравнение LLG (10.12) имеет вид:

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} - \hat{N}\mathbf{M}_0. \quad (10.31)$$

Аналогично, эффективное переменное поле имеет вид:

$$\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{h} - \hat{N}\delta\mathbf{M}. \quad (10.32)$$

Это выражение справедливо только при условии, что размеры образца малы по сравнению с длиной волны в веществе и электропроводность образца мала. Подставляя эти эффективные поля в уравнение LLG и линеаризуя его по  $\mathbf{h}_{eff}$  и  $\delta\mathbf{M}$ , получим:

$$\begin{aligned}i\omega\delta\mathbf{M} + \gamma\delta\mathbf{M} \times (\mathbf{H} - \hat{N}\mathbf{M}_0) + \gamma(\hat{N}\delta\mathbf{M}) \times \mathbf{M}_0 + \\ \frac{i\omega\alpha}{M_0}\delta\mathbf{M} \times \mathbf{M}_0 = -\gamma\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}.\end{aligned}\quad (10.33)$$

В случае свободных незатухающих колебаний, т.е.  $\alpha = 0$  и  $\mathbf{h} = 0$ , направив внешнее поле вдоль оси  $z$  (которая совпадает с одной из осей эллипсоида), из условия равенства

нулю детерминанта линейной однородной системы (10.33) получаем:

$$\omega_0^2 = \gamma^2 [H + (N_x - N_z)M_0] [H + (N_y - N_z)M_0]. \quad (10.34)$$

Таким образом при учете анизотропии формы частота ферромагнитного резонанса определяется уже не только внешним полем, а еще и полем анизотропии.

В предельном случае бесконечно тонкой пластинки в поле, перпендикулярном плоскости пластинки  $N_x = N_y = 0$ ,  $N_z = 4\pi$  (сгс) и  $\omega_0 = \gamma(H - 4\pi M_0)$ . В случае бесконечно цилиндра в поле, ориентированном вдоль оси цилиндра  $N_x = N_y = 2\pi$ ,  $N_z = 0$  и  $\omega_0 = \gamma(H + 2\pi M_0)$ .

В случае вынужденных колебаний намагниченности можно ввести понятие внешней восприимчивости, которая определяется как

$$\delta M = \hat{\chi}_e \mathbf{h}. \quad (10.35)$$

### 10.3.4 Учет магнитокристаллической анизотропии.

Рассмотрим случай одноосной анизотропии. Обозначим ось анизотропии  $z'$ . Пусть в приложенном внешнем поле намагниченность направлена вдоль оси  $z$ , составляющей угол  $\theta_0$  с  $z'$ . Пусть система координат  $(x, y, z)$  получается из системы  $(x', y', z')$  поворотом на угол  $\theta_0$  вокруг оси  $x'$ . Это не ограничивает общности, т.к. в плоскости  $(x', y')$  система считается изотропной и поэтому ось  $x'$  можно выбрать произвольно. Из выражения для энергии анизотропии  $E_{an} = k \sin^2 \theta_0$  получаем эффективное поле анизотропии

$$H_{an,z'} = -\frac{dE_{an}}{dM'_z} = \frac{2k}{M_0^2} M_{z'}. \quad (10.36)$$

В штрихованной системе координат все другие компоненты поля анизотропии равны нулю. В нештрихованной системе координат компоненты поля анизотропии имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{an,x} &= 0, \\ H_{an,y} &= -\frac{2k}{M_0^2} M_{z'} \sin \theta_0 = -\frac{2k}{M_0^2} (M_z \cos \theta_0 - M_y \sin \theta_0) \sin \theta_0, \\ H_{an,z} &= \frac{2k}{M_0^2} M_{z'} \cos \theta_0 = \frac{2k}{M_0^2} (M_z \cos \theta_0 - M_y \sin \theta_0) \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Эти соотношения можно записать в тензорном виде

$$\mathbf{H}_{an} = -\hat{N}_{an} \mathbf{M}, \quad (10.38)$$

где симметричный тензор  $\hat{N}_{an}$  имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} N_{an,11} &= N_{an,12} = N_{an,13} = 0, \\ N_{an,22} &= -\frac{2k}{M_0^2} \sin^2 \theta_0, \\ N_{an,33} &= -\frac{2k}{M_0^2} \cos^2 \theta_0, \\ N_{an,23} &= N_{an,32} = \frac{2k}{M_0^2} \sin \theta_0 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Математически выражение (10.38) выглядит эквивалентно полю размагничивания, поэтому задача о нахождении влияния магнитокристаллической анизотропии на резонансную частоту ферромагнетика сводится к уже решенной задаче о резонансной частоте при наличии анизотропии формы. Рассматривая образец в форме сферы, когда поле размагничивания не влияет на резонансную частоту, получим при наличии поля магнитокристаллической анизотропии

$$\omega_0^2 = \gamma^2 [H + H_{an} \cos^2 \theta_0] [H + H_{an} \cos 2\theta_0], \quad (10.40)$$

где введено обозначение  $H_{an} = 2k/M_0$ .

Рассмотрим крайние случаи направления внешнего поля. Пусть  $\theta_H$  - угол между направлением внешнего поля и легкой осью. Если  $\theta_H = 0$ , то и  $\theta_0 = 0$ , поэтому

$$\omega_0 = \gamma(H + H_{an}). \quad (10.41)$$

Если  $\theta_H = \pi/2$  и  $H > H_{an}$ , то  $\theta_0 = \pi/2$  и получаем:

$$\omega_0^2 = \gamma^2 H(H - H_{an}). \quad (10.42)$$

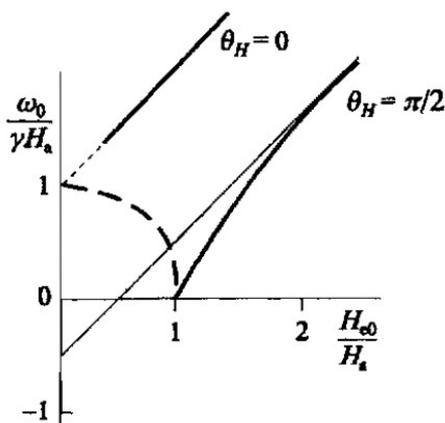


Рис. 10.5: Зависимость резонансной частоты однородных колебаний ферромагнитной сферы из одноосного магнетика от приложенного внешнего поля. Пунктиром показаны области, в которых полученные формулы не справедливы из-за отсутствия полного насыщения намагниченности в направлении приложенного поля. Из книги [13].

Рассмотренные случаи зависимостей резонансной частоты от внешнего поля приведены на рис. 10.5. Для многоосных кристаллов подобные расчеты зависимости резонансной частоты от направления внешнего поля также можно

провести, хотя они являются более громоздкими. Во всех случаях экспериментальное определение частоты ферромагнитного резонанса или угловых зависимостей резонансного поля является наиболее точным и распространенным методом определения констант магнитной анизотропии.

## 10.4 Ферримагнитный резонанс.

Магнитный резонанс в ферримагнетиках существенно отличается от резонанса в ферромагнетиках, т.к. наличие нескольких сильно связанных подрешеток приводит к увеличению числа ветвей колебаний. Рассмотрим ферримагнетик с двумя коллинеарными магнитными подрешетками А и В, имеющими намагниченности  $\mathbf{M}_A$  и  $\mathbf{M}_B$ , соответственно. Будем учитывать только межподрешеточное взаимодействие, а полями анизотропии пренебрежем. Пусть приложены внешние поля - постоянное  $\mathbf{H}$  и переменное  $\mathbf{h}$ , меняющееся по гармоническому закону. Тогда намагниченности также будут иметь вид суммы постоянной и переменной компонент  $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_{A,0} + \delta\mathbf{M}_A$ ,  $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_{B,0} + \delta\mathbf{M}_B$ . Эффективные поля, действующие на подрешетки, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{eff,A} &= \mathbf{H} + \mathbf{h} - w(\mathbf{M}_{B,0} + \delta\mathbf{M}_B), \\ \mathbf{H}_{eff,B} &= \mathbf{H} + \mathbf{h} - w(\mathbf{M}_{A,0} + \delta\mathbf{M}_A), \end{aligned} \quad (10.43)$$

где  $w > 0$ .

Если пренебречь затуханием, то уравнения LLG для двух подрешеток имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}_A}{dt} &= -\gamma_A[\mathbf{M}_A \times \mathbf{H}_{eff,A}], \\ \frac{d\mathbf{M}_B}{dt} &= -\gamma_B[\mathbf{M}_B \times \mathbf{H}_{eff,B}], \end{aligned} \quad (10.44)$$

где  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$  - гиромагнитные отношения для подрешеток. Пусть  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ , тогда  $\mathbf{M}_{A,0} = M_{A,0}\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{M}_{B,0} = -M_{B,0}\mathbf{e}_z$ . Подставляя выражения для эффективных полей (10.43) в уравнения LLG (10.44) и линеаризуя их по  $\mathbf{h}$  и  $\delta M_{A,B}$ , получим:

$$\begin{aligned} i\omega\delta\mathbf{M}_A + \gamma_A\delta\mathbf{M}_A \times (\mathbf{H} - w\mathbf{M}_{B,0}) + \\ \gamma_A\mathbf{M}_{A,0} \times (\mathbf{h} - w\delta\mathbf{M}_B) = 0, \\ i\omega\delta\mathbf{M}_B + \gamma_B\delta\mathbf{M}_B \times (\mathbf{H} - w\mathbf{M}_{A,0}) + \\ \gamma_B\mathbf{M}_{B,0} \times (\mathbf{h} - w\delta\mathbf{M}_A) = 0. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Из этих уравнений для  $\delta M_{A(B),+} = \delta M_{A(B),x} + i\delta M_{A(B),y}$  и  $\delta M_{A(B),-} = \delta M_{A(B),x} - i\delta M_{A(B),y}$  получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} [\pm\omega - \gamma_A(H + wM_{B,0})]\delta M_{A,\pm} - \gamma_A w M_{A,0} \delta M_{B,\pm} = \\ -\gamma_A M_{A,0} h_{\pm}, \\ \gamma_B w M_{B,0} \delta M_{A,\pm} + [\pm\omega - \gamma_B(H - wM_{A,0})]\delta M_{B,\pm} = \\ \gamma_B M_{B,0} h_{\pm}. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Положив в этой системе  $h_{\pm} = 0$ , определим собственные частоты колебаний ферритмагнетика, приравнявая нулю детерминант однородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \omega^2 \pm \omega[w(\gamma_B M_{A,0} - \gamma_A M_{B,0}) - (\gamma_A + \gamma_B)H] - \\ \gamma_A \gamma_B [w(M_{A,0} - M_{B,0}) - H]H = 0. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Здесь знак  $+$  отвечает правой циркуляции, а  $-$  левой. Ограничимся экспериментально релевантной областью слабых полей  $H \ll w(M_{A,0} - M_{B,0})$ . Тогда из (10.47) получаем:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} \approx \gamma_{eff,\pm} H, \\ \gamma_{eff,+} = \frac{M_{A,0} - M_{B,0}}{\frac{M_{A,0}}{\gamma_A} - \frac{M_{B,0}}{\gamma_B}}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Это колебание аналогично моде ферромагнитного резонанса, его частота пропорциональна полю, а величина  $\gamma_{eff,+}$  играет роль эффективного гиромагнитного отношения. Обычно характерные частоты этой моды лежат в области СВЧ.

$$\begin{aligned}\omega_- &\approx \omega_E - \gamma_{eff,-} H, \\ \omega_E &= w(\gamma_B M_{A,0} - \gamma_A M_{B,0}), \\ \gamma_{eff,-} &= \frac{\frac{\gamma_B M_{A,0}}{\gamma_A} - \frac{\gamma_A M_{B,0}}{\gamma_B}}{\frac{M_{A,0}}{\gamma_A} - \frac{M_{B,0}}{\gamma_B}}.\end{aligned}\quad (10.49)$$

Частота левополяризованной моды  $\omega_-$  определяется обменным взаимодействием и лежит в инфракрасной области (сотни ТГц). Это колебание называется высокочастотным или обменным. Подставляя в уравнения (10.46) полученные значения собственных частот и пренебрегая всеми членами с магнитным полем, получим:

$$\frac{\delta M_{A,+}}{\delta M_{B,+}} \approx -\frac{M_{A,0}}{M_{B,0}}, \quad (10.50)$$

$$\frac{\delta M_{A,-}}{\delta M_{B,-}} \approx -\frac{\gamma_A}{\gamma_B}. \quad (10.51)$$

Выражение (10.50) означает, что намагниченности в этой моде во время прецессии всегда остаются антипараллельными, см. рис. 10.6(а). Поэтому работа против обменной силы не совершается и, соответственно, обменное взаимодействие не влияет на частоту прецессии. Наоборот, при левой прецессии антипараллельность подрешеток нарушается, см. рис. 10.6(б), поэтому обменное взаимодействие начинает создавать вращательный момент, стремясь выстроить намагниченности антипараллельно. Частота зависит от обменной константы и становится высокой в силу того, что обменное взаимодействие велико по сравнению с энергиями внешних полей и анизотропии.

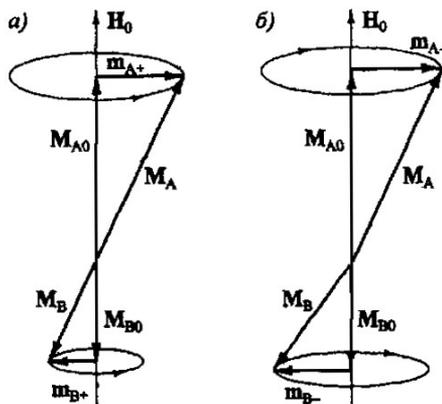


Рис. 10.6: (а) Правая и (б) левая прецессии намагниченностей ферримагнетика при низкочастотном и высокочастотном колебании, соответственно. Из книги [13].

Для нахождения магнитной восприимчивости ферромагнитной моды  $\omega_+$  надо решить систему (10.46) с верхним знаком и ненулевым переменным полем. Получим  $\delta M_+ = \delta M_{A,+} + \delta M_{B,+} = \chi_+ h_+$ , где

$$\chi_+ = \frac{\gamma_{eff,+}(M_{A,0} - M_{B,0})}{\omega_+ - \omega}. \quad (10.52)$$

Эта формула является полным аналогом формулы (10.25), только для ферримагнетика в нее входит эффективное гирромагнитное отношение и результирующая намагниченность двух подрешеток  $M_{A,0} - M_{B,0}$ .

Если приложено произвольное переменное поле, его всегда можно разложить на правополяризованную и левополяризованную компоненты. Т.к. частоты  $\omega_+$  и  $\omega_-$  сильно отличаются друг от друга, то одновременно они не возбуждаются. Учет кристаллографической анизотропии и анизотропии формы дает аналогичные ферромагнетику добавки к магнитному полю, но входят эффективные константы

кристаллографической анизотропии, которые можно представить как сумму констант анизотропии для подрешеток.

Независимо от типа и числа подрешеток всегда существует одна ферромагнитная мода, в которой намагниченности всех подрешеток колеблются как целое. Различных обменных мод -  $(n - 1)$ , где  $n$ -число подрешеток.

## 10.5 Антиферромагнитный резонанс.

В отличие от ферро- и ферримагнетиков, у антиферромагнетиков энергия анизотропии существенно влияет на вид колебаний, а влияние размагничивающего поля практически отсутствует в силу примерно нулевой суммарной намагниченности. Мы рассмотрим однородные колебания в антиферромагнетиках типа легкая ось и легкая плоскость.

Антиферромагнетик типа легкая ось. Пусть внешнее постоянное поле направлено вдоль легкой оси, а переменное - перпендикулярно ей (продольный резонанс). Используем уравнения (10.46) для ферримагнетика, в которых положим  $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$ ,  $M_{A,0} = M_{B,0} = M_0$ . Пусть также поле анизотропии  $H_{an} = k/M_0$  и обменное поле  $H_E = wM_0$ . Тогда из (10.46) получим:

$$\begin{aligned} [\pm\omega - \gamma(H + H_{an} + H_E)]\delta M_{A,\pm} - \gamma H_E \delta M_{B,\pm} = \\ -\gamma M_0 h_{\pm}, \\ -\gamma H_E \delta M_{A,\pm} + [\pm\omega - \gamma(H - H_{an} - H_E)]\delta M_{B,\pm} = \\ -\gamma M_0 h_{\pm}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Рассмотрим собственные колебания, т.е. положим  $h_{\pm} = 0$ . Тогда из равенства нулю детерминанта этой системы получим:

$$\omega_{\pm} = \gamma[\sqrt{H_{an}(2H_E + H_{an})} \pm H] \approx \omega_0 \pm \gamma H, \quad (10.54)$$

где  $\omega_0 = \gamma\sqrt{2H_E H_{an}}$ . Зависимости  $\omega_{\pm}$  от приложенного поля  $H$  приведены на рис. 10.7. Обычно частота  $\omega_0$  для антиферромагнетика лежит в нижней терагерцовой области и, например, для  $Cr_2O_3$  составляет  $\approx 165$  ГГц.

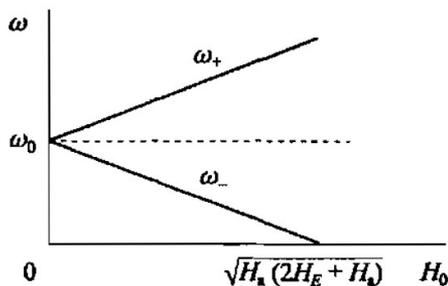


Рис. 10.7: Зависимости частот колебаний с правой и левой прецессией намагниченности от приложенного поля для антиферромагнетика типа легкая ось. Постоянное поле приложено вдоль легкой оси. Из книги [13].

Отношение амплитуд колебаний двух подрешеток в каждой из мод можно найти, если подставить найденные значения собственных частот в уравнения (10.53). Получим:

$$\frac{\delta M_{A,\pm}}{\delta M_{B,\pm}} = -\frac{H_E + H_{an} \mp \sqrt{H_{an}(2H_E + H_{an})} + H(1 \mp 1)}{H_E} \approx -\left(1 \mp \frac{\sqrt{H_{an}(2H_E + H_{an})}}{H_E}\right). \quad (10.55)$$

Таким образом, отношение амплитуд колебаний мало отличается от  $-1$  и почти не зависит от внешнего поля. Характер прецессии показан на рис. 10.8.

Магнитную восприимчивость можно найти из уравнения (10.53).  $\delta M_{\pm} = \delta M_{A,\pm} + \delta M_{B,\pm} = \chi_{\pm} h_{\pm}$ , где

$$\chi_{\pm} \approx \frac{2\gamma^2 H_{an} M_0}{(\omega_{\pm} - \omega)(\omega_{\pm} + \omega)}. \quad (10.56)$$

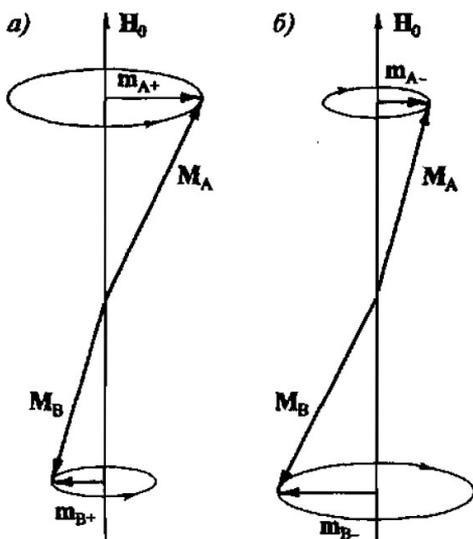


Рис. 10.8: Правая и левая прецессии намагниченности подрешеток антиферромагнетика. Поле приложено вдоль легкой оси. Из книги [13].

Антиферромагнетик типа легкая плоскость. Пусть теперь поле  $\mathbf{H}$  лежит в той же плоскости, что и намагниченности подрешеток. При отсутствии анизотропии в легкой плоскости намагниченности ориентируются перпендикулярно приложенному полю с небольшим скосом к нему, см. рис. 10.9. Угол скоса определяется условием  $\sin \varphi = H/2H_E$ . В этом случае возможно возбуждение двух мод с частотами

$$\omega_{\perp,1} = \gamma H \sqrt{1 + \frac{H_{an}}{2H_E}}, \quad (10.57)$$

$$\omega_{\perp,2} = \gamma \sqrt{2H_{an}H_E - \frac{H_{an}}{2H_E} H^2}. \quad (10.58)$$

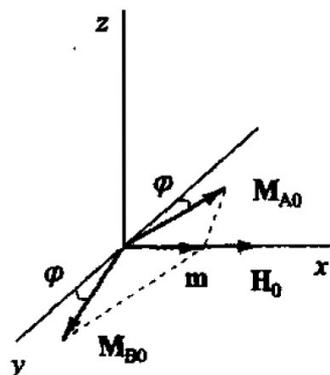


Рис. 10.9: Ориентация намагниченностей подрешеток и постоянного поля в случае антиферромагнетика типа легкая плоскость. Поле приложено в легкой плоскости вдоль оси  $y$ . Из книги [13].

Характер движения намагниченностей подрешеток при этих колебаниях показан на рис. 10.10. При колебаниях с частотой  $\omega_{\perp,1}$  намагниченности подрешеток колеблются так, что их  $y$ -компоненты (которые велики по сравнению с  $x$ -компонентами по параметру  $2H_E/H$ ) всегда находятся в противофазе, а  $x$ -компоненты в фазе. Поэтому суммарная намагниченность совершает правую прецессию в плоскости  $(x, z)$ , перпендикулярной приложенному полю. При этом типе колебаний угол между векторами  $M_A$  и  $M_B$  всегда остается примерно постоянным, поэтому частота пропорциональна внешнему полю. Этот тип колебаний возбуждается поперечным переменным полем, которое перпендикулярно постоянному.

При колебаниях с частотой  $\omega_{\perp,2}$  намагниченности подрешеток колеблются так, что их проекции на плоскость  $(y, z)$  описывают одинаковые вытянутые эллипсы.  $y$ -компоненты колеблются в фазе, а  $z$ -компоненты в противофа-

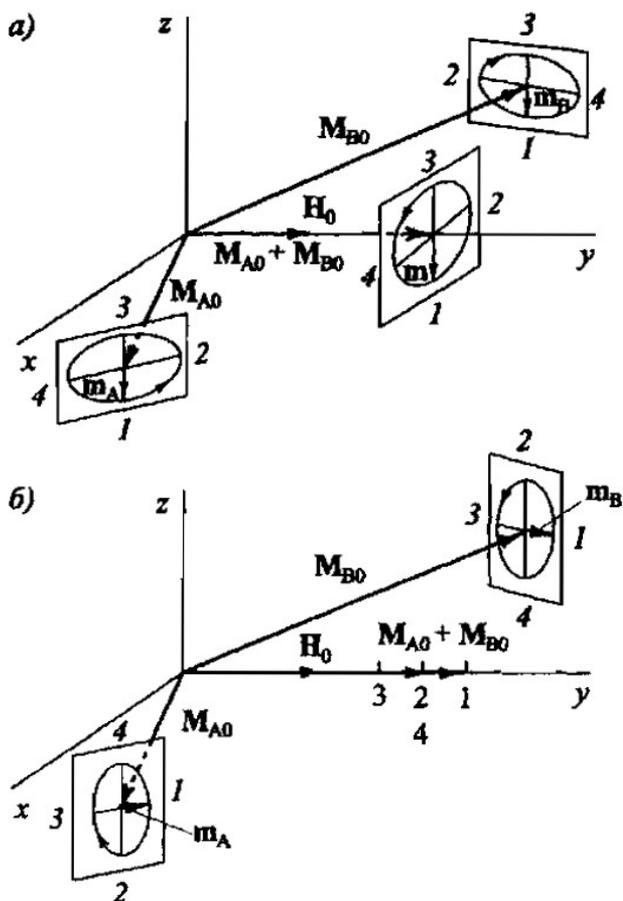


Рис. 10.10: Прецессия векторов намагниченностей подрешеток антиферромагнетика типа легкая плоскость в постоянном поле, приложенном в легкой плоскости. (а) Колебание с частотой  $\omega_{\perp,1}$ ; (б) колебание с частотой  $\omega_{\perp,2}$ . Цифрами показан порядок перемещения конца вектора намагниченности при колебании. Из книги [13].

зе. Суммарная намагниченность имеет только  $y$ -компоненту. Угол между намагниченностями меняется, поэтому частот

та этой моды определяется обменными силами и полем анизотропии. Этот тип колебаний возбуждается продольным переменным полем, которое параллельно постоянному.

## 10.6 Спиновые волны.

Спиновые волны в магнетике бывают когерентные и некогерентные. С повышением температуры возбуждаются некогерентные спиновые волны, которые имеют широкое распределение по частотам и волновым числам. Под действием переменного поля могут возбуждаться когерентные спиновые волны.

### 10.6.1 Электродинамика плоских волн в магнитной среде.

Распространение электромагнитной волны в магнетике описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Здесь предполагается отсутствие свободного заряда в объеме материала и отсутствие токов проводимости (магнитный диэлектрик). Уравнения Максвелла необходимо дополнить материальными уравнениями, которые связывают вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , а также  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ . Мы будем предполагать изотропные диэлектрические свойства среды  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ . Связь  $\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$  в ферромагнетике определяется тензором магнитной проницаемости  $\hat{\mu} = 1 + 4\pi \hat{\chi}$ , который определяется через восприимчивость, т.е. из решения уравнения LLG.

Начнем с изучения распространения в магнитной среде волн с большими длинами, т.ч. длина волны велика по сравнению с межатомными расстояниями, т.е. угол между намагниченностями соседних атомов мал и поэтому неоднородную часть обменного взаимодействия можно не учитывать. В этом случае намагниченность можно считать однородной и тензор магнитной проницаемости определяется через тензор восприимчивости (10.21), который не зависит от волнового вектора. Поэтому в этом пределе магнитная среда не обладает пространственной дисперсией. Пространственная дисперсия  $\hat{\mu}$  появится позже, когда мы будем рассматривать более короткие длины волн.

Из уравнений (10.59) легко получить волновое уравнение

$$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (10.60)$$

которое для плоской волны вида  $\mathbf{H} \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$  приобретает вид

$$k^2\mathbf{H} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{H}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \hat{\mu} \mathbf{H}. \quad (10.61)$$

Теперь рассмотрим отдельно случаи распространения волны вдоль намагниченности  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$  (продольное намагничивание) и распространения волны перпендикулярно намагниченности (поперечное намагничивание).

Продольное намагничивание. В уравнении (10.61)  $\mathbf{H} = (h_x, h_y, 0)$  и, расписывая это уравнение в координатах, получаем, что оно распадается на два независимых уравнения для циркулярно поляризованных волн правой и левой циркуляции

$$k^2 h_{\pm} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon (\mu \pm \mu_a) h_{\pm}, \quad (10.62)$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi\chi = \frac{\omega_0(\omega_0 + \omega_M) - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (10.63)$$

$$\mu_a = 4\pi\chi_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (10.64)$$

$\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ . Таким образом, волны с правой и левой круговой поляризациями при одинаковой частоте имеют разные волновые вектора

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\mu \pm \mu_a)}. \quad (10.65)$$

Это физически объясняется тем, что намагниченность, направленная вдоль оси  $z$  эквивалентна круговому току, имеющему определенное направление вращения в плоскости  $(x, y)$ , поэтому направления левого и правого вращения в этой плоскости не эквивалентны.

Закон дисперсии  $\omega_{\pm}(k)$  для волны, распространяющейся в магнетике в условиях продольного намагничивания, можно получить из (10.65), если подставить в это уравнение (10.63) и (10.64). Зависимости  $\omega_{\pm}(k)$  показаны на рис. 10.11. Для волны с левой прецессией дисперсия близка к линейной, характерной для немагнитной среды. У волны с правой прецессией есть две ветви: высокочастотная ветвь начинается от  $\omega_0 + \omega_M$  и приближается к левополяризованной ветви, а низкочастотная ветвь ограничена сверху частотой  $\omega_0$  при больших  $k$ , при этом как фазовая, так и групповая скорость становятся малыми. В интервале частот  $\omega \in (\omega_0, \omega_0 + \omega_M)$  волна с правой прецессией в данном рассмотрении не существует. На самом деле, при учете диссипации она существует, но очень быстро затухает.

Любая волна может быть представлена как суперпозиция лево и правополяризованных волн. Эти волны имеют

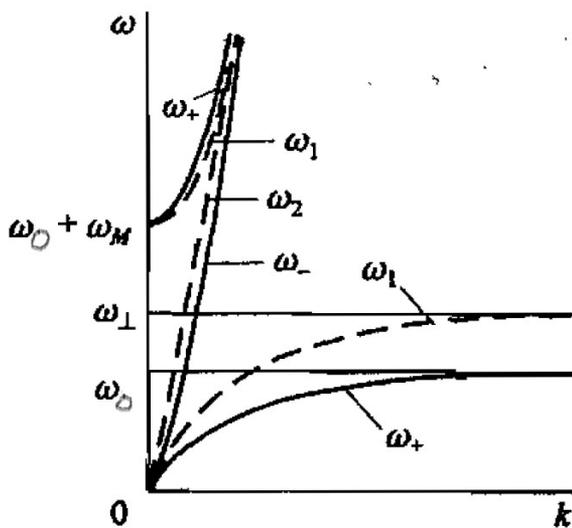


Рис. 10.11: Дисперсионная зависимость электромагнитных плоских волн в магнитной среде. Сплошные линии - моды продольного намагничивания, пунктирные линии - моды поперечного намагничивания. Из книги [13].

разные волновые векторы при одной и той же частоте. В результате этого структура поляризации волны при прохождении через магнитную среду будет меняться. Например, если мы рассмотрим линейно поляризованную в начальный момент времени волну  $h_+ + h_-$ , то после прохождения расстояния  $l$  лево и правополяризованные компоненты наберут разные фазы  $[h_+ e^{ik_+ l} + h_- e^{ik_- l}] e^{-i\omega t}$ . Таким образом, плоскость поляризации волны повернется на угол  $\theta = (k_+ - k_-)l/2$ . Это эффект Фарадея - вращение плоскости поляризации при прохождении света в продольно намагниченной гиротропной среде.

Поперечное намагничивание. Волновой вектор перпендикулярен намагниченности среды. Обозначим ось, вдоль

которой направлен волновой вектор за  $y$ . Тогда из уравнения (10.61) получаем, что существуют две независимые моды. В одной из них магнитное поле эллиптически поляризовано в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{M}_0$ , а в другой - магнитное поле волны параллельно  $\mathbf{M}_0$ . Соответствующие волновые вектора имеют вид:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \left( \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu} \right)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \frac{(\omega_0 + \omega_M)^2 - \omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \omega_M) - \omega^2}}, \quad (10.66)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}. \quad (10.67)$$

Первая волна называется необыкновенной, а вторая - обыкновенной. Дисперсионные кривые для необыкновенной ( $\omega_1(k)$ ) и обыкновенной ( $\omega_2(k)$ ) волн представлены на рис. 10.11 пунктирными линиями. У необыкновенной волны две ветви, аналогично правополяризованной волне в случае продольного намагничивания. Только теперь роль предельной частоты для низкочастотной ветви играет  $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}$ .

Опять, любая волна, распространяющаяся в среде в условиях поперечного намагничивания, может быть разложена на две нормальные волны. Т.к. волновые вектора этих волн разные, состояние поляризации волны меняется в процессе распространения. Пусть, например, в начальный момент времени есть линейно поляризованная волна, в которой направление электрического поля составляет угол  $\pi/4$  с осями  $x$  и  $z$ , см. рис. 10.12. После прохождения пути  $l = \pi/2|k_+ - k_-|$  эта волна становится циркулярно поляризованной, а еще через такое же расстояние электрическое поле в волне опять станет линейно поляризованным, но направление поляризации повернется на  $\pi/2$  по сравнению с исходным, см. рис. 10.12. Этот эффект называется эффектом Фохта - вращение плоскости поляризации в условиях поперечного намагничивания.

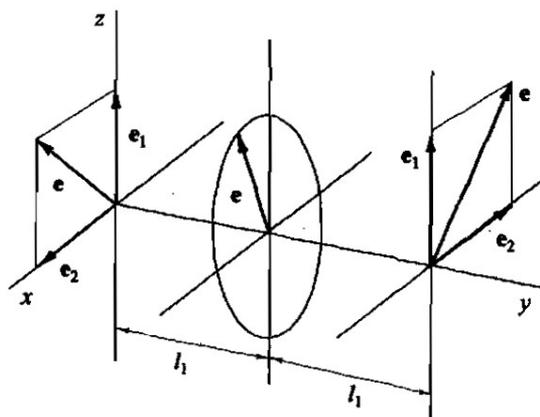


Рис. 10.12: Преобразование поляризации волны, распространяющейся перпендикулярно намагниченности среды. Из книги [13].

При распространении волны под углом  $\theta$  к намагниченности низкочастотная ветвь дисперсионной кривой асимптотически стремится к частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M \sin \theta)} \quad (10.68)$$

которая лежит между  $\omega_0$  и  $\omega_{\perp}$ .

### 10.6.2 Магнитостатические и обменные волны.

В интервале частот  $\omega \in (\omega_0, \omega_{\perp})$  и при  $10^2 \text{см}^{-1} < k \lesssim 10^4 \text{см}^{-1}$  влияние неоднородной части обменного взаимодействия все еще очень мало и дисперсия спиновых волн описывается формулой (10.68), т.е. не зависит от  $k$  и, следовательно, групповая скорость таких волн равна нулю. На самом деле это приближение и скорость волн в данном диапазоне отлична от нуля, хотя и мала  $\sim 10^6 - 10^8 \text{см/с}$ .

Конечная скорость получается из-за учета слабой зависимости  $\omega(k)$ , учета обменного взаимодействия и граничных условий. Волны в данном диапазоне волновых векторов и частот называют магнитостатическими.

При  $k > 10^4 \text{cm}^{-1}$  пренебречь неоднородным обменом уже нельзя. Такие волны называют обменными. Из-за малой длины волны роль граничных условий в дисперсионных зависимостях таких волн снижается. Рассмотрим обменные волны в бесконечной изотропной среде. Для волны намагниченности можно написать  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M}$ , где  $\delta\mathbf{M}$  - мало. Для плотности энергии, связанной с неоднородным обменом, можно написать из (10.11):

$$E_{ex} = \frac{1}{2}\beta(\nabla\delta\mathbf{M})^2, \quad (10.69)$$

откуда получаем эффективное поле, создаваемое в магнетике неоднородным обменом:

$$\mathbf{h}_{ex} = \beta\nabla^2\delta\mathbf{M}. \quad (10.70)$$

Для плоской волны, когда переменное внешнее поле и намагниченность меняются по закону  $\mathbf{h} \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  и  $\delta\mathbf{M} \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$

$$\mathbf{h}_{ex} = -\beta k^2\delta\mathbf{M}. \quad (10.71)$$

Тогда с учетом поля неоднородного обмена и пренебрегая затуханием линеаризованное по  $\delta\mathbf{M}$  и  $\mathbf{h}$  уравнение LLG будет иметь вид:

$$i\omega\delta\mathbf{M} + (\omega_0 + \eta k^2)\delta\mathbf{M} \times \mathbf{e}_z = \gamma\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}, \quad (10.72)$$

где  $\eta = \gamma M_0\beta$ . Получаем, что учет неоднородного обмена привел к замене  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \eta k^2$ . В выражениях для магнитных проницаемостей (10.63)-(10.64) это приводит к появлению пространственной дисперсии. Чтобы получить закон

дисперсии  $\omega(k)$  при произвольном угле между направлением намагниченности и распространения волны надо сделать данную замену в уравнении (10.68). Т.к. реально магнитная система является дискретной решеткой, то возможные значения  $k$  ограничены первой зоной Бриллюэна и при больших  $k$  зависимость  $\omega(k)$  отклоняется от квадратичной. Частота спиновых волн ограничена значениями  $\sim 10^{13}$  Гц. Полный спектр  $\omega(k)$  для спиновых волн в ферромагнетике схематично, без соблюдения масштаба представлен на рис. 10.13.

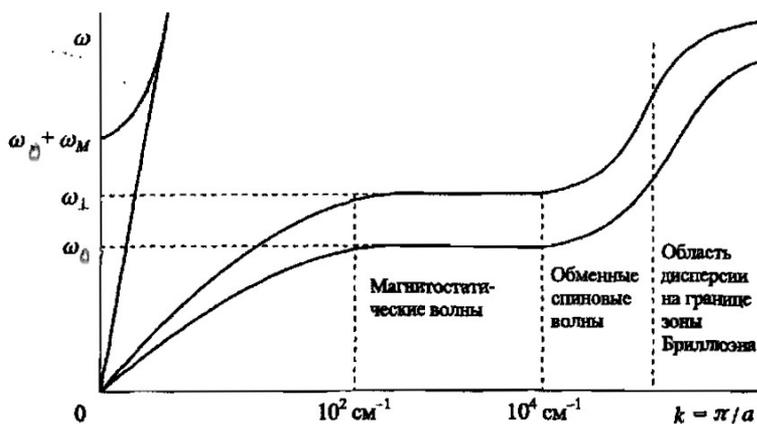


Рис. 10.13: Схематичное изображение полного спектра спиновых волн в ферромагнетике. Из книги [13].

### 10.6.3 Спиновые волны в антиферромагнетике.

При решении задачи о спектре спиновых колебаний в антиферромагнетике необходимо учитывать однородную часть обменного взаимодействия, т.к. именно она влияет на колебания, приводящие к скосу подрешеток. Рассмотрим двух-

подрешеточный антиферромагнетик типа легкая ось, у которого за основное состояние принимается состояние с однородными намагниченностями подрешеток с нулевой суммарной намагниченностью.

Если внешнее поле параллельно легкой оси, то

$$\omega_{1,2} = \gamma \sqrt{2H_{an}H_E + H_E^2 a^2 k^2} \pm \gamma H, \quad (10.73)$$

где  $a$  - параметр размерности длины, имеющий порядок постоянной решетки.

Если внешнее поле перпендикулярно легкой оси, то

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \gamma \sqrt{2H_{an}H_E + H_E^2 a^2 k^2}, \\ \omega_2 &= \gamma \sqrt{2H_{an}H_E + H^2 + H_E^2 a^2 k^2}. \end{aligned} \quad (10.74)$$

Для всех ветвей спиновых волн (а также для антиферромагнетика типа легкая плоскость) закон дисперсии для антиферромагнетиков линеен при больших  $k$ , в отличие от ферромагнетиков, для которых он квадратичен.

# Литература

- [1] Берклеевский курс физики. Том 4. Вихманн Э. Квантовая физика. Москва: Издательство «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1986. - Серия «Берклеевский курс физики»
- [2] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 8, 9. Квантовая механика, URSS, 2014.
- [3] А. Мессиа, Квантовая механика. Т.II. М.: Наука, 1979.
- [4] А. Мессиа, Квантовая механика. Т.I. М.: Наука, 1979.
- [5] M. Getzlaff, Fundamentals of magnetism, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 7. Физика сплошных сред, URSS, 2015.
- [7] Е.С. Боровик, В.В. Еременко, А.С. Мильнер, Лекции по магнетизму, М:Физматлит, 2005.
- [8] Н. Ашкрофт, Н. Мермин, Физика твердого тела. Том 1, М:Мир, 1979.
- [9] Н. Ашкрофт, Н. Мермин, Физика твердого тела. Том 2, М:Мир, 1979.

- 
- [10] M. Gibertini, M. Koperski, A. F. Morpurgo, and K. S. Novoselov, Magnetic 2D materials and heterostructures, *Nature Nanotechnology* **14**, 408 (2019).
- [11] Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, Издательство иностранной литературы, Москва, 1956.
- [12] С.В. Вонсовский, Магнетизм, Наука, 1971.
- [13] В.А. Боков, Физика магнетиков, Невский диалект, Санкт-Петербург, 2002.