Задачи 2024 (МФТИ)

Коэффициенты отражения и прохождения

Задача 1 Используя явный вид волновых функций состояний рассеяния

$$\psi_E(z) = \begin{cases} a_1\, e^{ik_1 z}/\sqrt{2\pi\hbar v_1} + b_1\, e^{-ik_1 z}/\sqrt{2\pi\hbar v_1} & \text{при } z \to -\infty; \\ a_2\, e^{ik_1 z}/\sqrt{2\pi\hbar v_2} + b_2\, e^{-ik_2 z}/\sqrt{2\pi\hbar v_2} & \text{при } z \to +\infty, \end{cases}$$

покажите, что квантовомеханическая плотность потока вероятности $\Pi(E)$ слева и справа от барьера равны $\left(|a_1|^2 - |b_1|^2\right)/(2\pi\hbar)$ и $\left(|a_2|^2 - |b_2|^2\right)/(2\pi\hbar)$, соответственно.

Задача 2 Используя общий вид матрицы рассеяния для случая одноканального рассеяния

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix},$$

покажите, что трансфер–матрица в этом случае может быть записана в следующем виде

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} t^{-1} & -t^{-1}\, r' \\ r\, t^{-1} & t' - r\, t^{-1}\, r' \end{pmatrix}.$$

Задача 3 Вычислите амплитуды отражения r и прохождения t при падении частицы на одномерный потенциальный барьер вида

$$U_\delta(z) = D\,\delta(z - z_1) + \begin{cases} U_1 \text{ при } z < z_1 \\ U_2 \text{ при } z > z_1 \end{cases}$$

слева.

Задача 4 Вычислите амплитуды отражения r' и прохождения t' при падении частицы на одномерный потенциальный барьер вида

$$U_\delta(z) = D\,\delta(z - z_1) + \begin{cases} U_1 \text{ при } z < z_1 \\ U_2 \text{ при } z > z_1 \end{cases}$$

справа.

Задача 5 Вычислите амплитуды отражения и прохождения для потенциала с двумя локализованными рассеивателями для случая одноканального рассеивания по теории возмущений, предполагая, что коэффициент прохождения для каждого барьера близок к единице.

Задача 6 Вычислите амплитуды отражения и прохождения для потенциала с двумя локализованными рассеивателями для случая одноканального рассеивания без привлечения аппарата теории возмущений.

Задача 7 Используя приведённое ниже выражение для трансфер–матрицы, описывающей рассеяние частицы на скачке потенциала с дельта-функцией (см. задачу 3)

$$\hat{M} = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \begin{pmatrix} \left[k_1 + k_2 + i\,2m^* D/\hbar^2\right] e^{i(-k_1+k_2)z_1}, & \left[k_1 - k_2 + i\,2m^* D/\hbar^2\right] e^{i(-k_1-k_2)z_1} \\ \left[k_1 - k_2 - i\,2m^* D/\hbar^2\right] e^{i(k_1+k_2)z_1}, & \left[k_1 + k_2 - i\,2m^* D/\hbar^2\right] e^{i(k_1-k_2)z_1} \end{pmatrix},$$

вычислить компоненты трансфер–матрицы для одномерного прямоугольного потенциального барьера конечной высоты. Индексы 1 и 2 относятся параметрам электронных волн в областям перед барьером и за барьером, соотнотственно.

Задача 8 Используя выражение для трансфер–матрицы, описывающей рассеяние частицы на скачке потенциала с дельта-функцией (см. задачу 7), вычислите коэффициент прохождения $\mathcal{T}(E)$ для случая нормального падения частицы и исследуйте асимптотическое поведение $\mathcal{T}(E)$ для малых и больших энергий. Рассмотреть два случая: симметричный дельта-барьер ($k_1 = k_2$ и $D \neq 0$) и скачок потенциала без дельта-барьера ($k_1 \neq k_2$ и $D = 0$).

Задача 9 Используя приведённое ниже выражение для трансфер–матрицы, описывающей рассеяние частицы на одномерном прямоугольном потенциальном барьере

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$M_{11} = \frac{e^{-ik_1z_1+ik_3z_2}}{4\sqrt{k_1k_2}\,\sqrt{k_2k_3}} \Big\{(k_1+k_2)(k_2+k_3)\,e^{-ik_2w_2} + (k_1-k_2)(k_2-k_3)\,e^{ik_2w_2}\Big\},$$

$$M_{12} = \frac{e^{-ik_1z_1-ik_3z_2}}{4\sqrt{k_1k_2}\,\sqrt{k_2k_3}} \Big\{(k_1+k_2)(k_2-k_3)\,e^{-ik_2w_2} + (k_1-k_2)(k_2+k_3)\,e^{ik_2w_2}\Big\},$$

$$M_{21} = \frac{e^{ik_1z_1+ik_3z_2}}{4\sqrt{k_1k_2}\,\sqrt{k_2k_3}} \Big\{(k_1-k_2)(k_2+k_3)\,e^{-ik_2w_2} + (k_1+k_2)(k_2-k_3)\,e^{ik_2w_2}\Big\},$$

$$M_{22} = \frac{e^{ik_1z_1-ik_3z_2}}{4\sqrt{k_1k_2}\,\sqrt{k_2k_3}} \Big\{(k_1-k_2)(k_2-k_3)\,e^{-ik_2w_2} + (k_1+k_2)(k_2+k_3)\,e^{ik_2w_2}\Big\},$$

вычислите коэффициент прохождения $\mathcal{T}(E)$ через такой барьер. Индексы 1, 2 и 3 относятся к параметрам электронных волн в областям перед барьером, внутри барьера и за барьером, соответственно; точки z_1 и z_2 соответствуют положению левой и правой стенок барьера, $w_2 = z_2 - z_1$ – ширина барьера. Рассмотрите частные случаи: симметричный барьер, «слабый» барьер и малопрозрачный барьер.

Задача 10 Получите выражение для трансфер–матрицы, описывающей рассеяние частицы на скачке потенциала без дельта–функции (см. задачу 3) для случая наклонного падения.

Задача 11 * Исследуйте зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на скачке потенциала без дельта–функции (см. задачу 10) от энергии налетающей волны E и угла падения φ_1 для случая наклонного падение частицы на барьер.

Задача 12 Получите выражение для трансфер–матрицы для случая наклонного падения частицы на скачок потенциала с дельта–функцией (см. задачу 3).

Задача 13 Вычислить коэффициент отражения и прохождения для дельта–образного потенциального барьера $U(z) = D\,\delta(z)$ для случая нормального падения частицы на барьер.

Задача 14 Используя выражение для трансфер–матрицы, описывающей прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер, (см. задачу 9), получить трансфер–матрицу для $\delta-$функционального барьера (см. задачу 7) предельным переходом $w_2 = x_2 - x_1 \to 0$ и $U_2 \to \infty$ при условии $U_2w_2 = D = \text{const}$.

Задача 15 Рассчитать положение максимумов и минимумов коэффициента пропускания для прямоугольного потенциального барьера, рассматривая синфазное и противофазное сложение волн на стенках барьера. Сравнить с результатами задачи 9.

Задача 16 Для потенциального барьера $U_{2\delta}(z)$ следующего вида

$$U_{2\delta}(z) = D_1\delta(z) + D_2\delta(z-a)$$

исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при от энергии налетающей волны E для случая нормального падения. Обсудить зависимость эффективности резонансного прохождения от отношения D_1/D_2.

Задача 17 Вычислите коэффициент прохождения через двойной прямоугольный потенциальный барьер для случая подбарьерного прохождения. Обсудить зависимость эффективности резонансного прохождения от отношения U_1/U_2, где U_1 и U_2 – высоты барьеров.

Задача 18 Задача Кронинга-Пенни: используя метод трансфер-матрицы, рассчитать спектр разрешённых состояний (зонный спектр) для электрона в потенциале, представляющем собой последовательность прямоугольных потенциальных барьеров, где L – период структуры.

Задача 19 Используя метод трансфер-матрицы рассчитать спектр разрешенных состояний (зонный спектр) для электрона в периодическом потенциале дельта-образного вида $U_{n\delta}(z) = \sum\limits_n D\,\delta(z-Ln)$, где L – период структуры.

Задача 20 В квазиклассическом приближении рассчитать вероятность отражения и прохождения частицы от потенциального барьера $U(z)$.

Задача 21 В квазиклассическом приближении рассчитать вероятность отражения и прохождения частицы от треугольного потенциального барьера $U(z) = 0$ при $z < 0$ и $U(z) = U_0 - Fz$ при $z > 0$.

Задача 22 В квазиклассическом приближении рассчитать коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер вида $U(r) = -U_0$ при $r < r_0$ и $U(r) = A/r$ при $r > r_0$ (в предположении о малой туннельной прозрачности барьера).

Уровни размерного квантования. Квазистационарные состояния

Задача 23 Рассчитайте энергетический спектр частицы в дельта–образной потенциальной яме $U(z) = -D\,\delta(z)$, где $D > 0$.

Задача 24 Приведите соотношение $\arg r_1' + \arg\, r_2 = 2\pi n$ для спектра частицы в одномерной яме к виду

$$k_2\,(z_2 - z_1) = \pi n - \operatorname{arctg}\left(\frac{k_2}{\varkappa_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{k_2}{\varkappa_3}\right).$$

Здесь r_1' и r_2 есть амплитуды отражения от левой и правой стенок потенциальной ямы (см. постановку задач 3 и 4), $\varkappa_1$ и $\varkappa_3$ – мнимая часть волновых векторов внутри левого и правого барьеров, соответственно; k_2 – волновой вектор волны внутри ямы; точки z_1 и z_2 соответствуют положению левой и правой стенок барьера, $w_2 = z_2 - z_1$ – ширина ямы.

Задача 25 Рассчитайте энергетический спектр частицы в прямоугольной потенциальной яме конечной высоты, приведённый в задаче 24, используя формализм трансфер–матрицы и явный вид трансфер-матрицы из задачи 9.

Задача 26 Используя приведённое ниже выражение для спектра частицы в прямоугольной потенциальной яме конечной высоты (см. задачу 24)

$$k_2\,(z_2 - z_1) = \pi n - \mathrm{arctg}\left(\frac{k_2}{\varkappa_1}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{k_2}{\varkappa_3}\right),$$

получите энергетический спектр для глубокой и мелкой потенциальных ям.

Задача 27 Рассчитайте расщепление уровней в симметричных связанных прямоугольных потенциальных ямах в предположении о малой прозрачности туннельного барьера, разделяющего левую и правую ямы.

Задача 28 Оцените период осцилляций электронной плотности в туннельно–связанных потенциальных ямах.

Задача 29 Получите формулу Бора–Зоммерфельда

$$\frac{1}{\pi\hbar}\int\limits_{z_1}^{z_2} p(z)\,dz = n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2...$$

используя формулу связи затухающих и осциллирующих квазиклассических решений вблизи классической точки поворота

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{|p(z)|}}\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\Big|\int\limits_{z_0}^{z} p(z)\,dz\Big|\right\} \quad \text{при} \quad E_{\|} < U(z) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{p(z)}}\,\cos\left\{\frac{1}{\hbar}\left|\int\limits_{z_0}^{z} p(z)\,dz\right| - \frac{\pi}{4}\right\} \quad \text{при} \quad E_{\|} > U(z).$$

Задача 30 Получить выражение для нормированной квазиклассической волновой функции частицы в потенциальной яме.

Задача 31 Применяя классическую формулу квантования Бора–Зоммерфельда

$$\frac{1}{\pi\hbar}\int\limits_{z_1}^{z_2} p(z)\,dz = n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2...$$

получите спектр состояний частицы в параболической потенциальной яме. Сравните полученный результат с точным решением.

Задача 32 Применяя классическую формулу квантования Бора–Зоммерфельда

$$\frac{1}{\pi\hbar}\int\limits_{z_1}^{z_2} p(z)\,dz = n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2...$$

получите спектр состояний частицы в прямоугольной потенциальной яме в бесконечно высокими стенками. Сравните полученный результат с точным решением. Как можно модифицировать формулу Бора-Зоммерфельда, чтобы улучшить точность приближенной формулы?