

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Образовательная программа "Мезоскопические квантовые явления в
функциональных микро- и наноструктурах"

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность подготовки: Общая и прикладная физика

Реализация прецизионной магнитометрии на базе
алгоритмов оценки фазы на кутрите-трансмоне
(Магистерская диссертация)

Выполнил
студент 6 курса гр. М02-306е
Соловьев Артём Алексеевич

подпись _____

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Лебедев Андрей Владимирович

подпись _____

Долгопрудный, 2025 год

Аннотация

В последние годы растёт интерес к применению квантовых технологий для прецизионных измерений ввиду возможности значительного повышения точности и чувствительности сенсоров. В частности, квантовые магнитометры способны достигать фундаментального предела Гейзенберга, при достижении которого ошибка измерения уменьшается с увеличением времени измерения как $1/t$ (где t — время измерения), тогда как возможности классических сенсоров ограничены пределом дробового шума - $1/\sqrt{t}$. Это открывает перспективы для улучшения точности и скорости измерений в таких областях, как, например, медицина и биомагнитные измерения.

В качестве такого сенсора может быть использован сверхпроводниковый трансмон. Наличие дополнительных уровней позволяет использовать трансмон как кудит - квантовую систему размерности $d > 2$. Использование дополнительных уровней теоретически приводит к улучшению точности измерения по закону $1/(d - 1)$, где d — число используемых уровней.

Однако в реальных условиях квантовые системы подвержены декогеренции и шумам, что может нивелировать теоретические преимущества. В работе представлена экспериментальная реализация сенсора постоянного магнитного поля, использующего алгоритмы оценки фазы на сверхпроводниковом трансмоне, что позволяет сравнить характеристики кудитных и кубитных сенсоров, а также различные алгоритмы оценки фазы в контексте квантовой метрологии в условиях низкочастотного шума и декогеренции и показать преимущества использования кудитных схем.

Содержание

Введение	4
1 Литературный обзор	7
1.1 Основы классической и квантовой теории оценок	9
1.1.1 Классическая теория оценок и граница Крамера–Рао	10
1.1.2 Квантовая теория оценок и квантовая граница Крамера–Рао	14
1.1.3 Байесовский подход	16
1.2 Конверсия время - запутанность, последовательная и параллельная метрологические стратегии	20
1.2.1 Параллельная стратегия	21
1.2.2 Последовательная стратегия	22
1.3 Реализация последовательной стратегии на сверхпроводящих искусственных атомах	24
1.3.1 Сверхпроводниковый трансмон во внешнем магнитном поле	25
1.3.2 Обоснование преимущества кудитных протоколов	26
1.3.3 Оптимизация метрологических протоколов для трансмона в кудитном режиме при измерении непрерывной переменной	29
1.3.4 Трансмон в кутритном режиме - реализация управляющих и считывающих метрологических последовательностей	31
1.3.5 Влияние ошибки считывания на эффективность протоколов оценки фазы	36
1.4 Учет влияния шумов	38
1.4.1 Высокочастотный шум - $\omega_{noise} \gg \frac{1}{\tau_{meas}}$	38
1.4.2 Шум с $\omega_{noise} \approx \frac{1}{\tau_{meas}}$	39
1.4.3 Низкочастотный шум - $\omega_{noise} \ll \frac{1}{\tau_{meas}}$	39
2 Описание эксперимента	39
2.1 Описание экспериментальной установки и схемы измерений	40
2.1.1 Криостат растворения	40
2.1.2 Схема генерации управляющих и считывающих импульсов с использованием модуляции и демодуляции на I-Q миксере	43
2.1.3 Дизайн образца	45
2.1.4 Описание схемы измерения	47
2.2 Экспериментальные метрологические паттерны	48
2.2.1 Использование двух паттернов, сдвинутых по фазе, для кубитного режима	49
2.2.2 Байесовский подход	50
2.3 Модифицированные алгоритмы оценки фазы	51

2.3.1	Классический алгоритм	51
2.3.2	Алгоритм Китаева	51
2.3.3	Алгоритм полуклассического преобразования Фурье	52
2.3.4	Линейный восходящий алгоритм - LAMA	53
3	Анализ полученных результатов	55
3.1	Анализ зависимости извлеченной информации в зависимости от кван- тового времени измерения	55
3.2	Анализ зависимости точности измерения от полного времени измерения	58
3.3	Сравнение полученных результатов с альтернативными платформами .	61
4	Заключение	61
	Список литературы	62

Введение

Типичной задачей квантовой метрологии является измерение неизвестного параметра λ квантовой системы. Традиционный подход к решению этой задачи заключается в измерении соответствующей наблюдаемой, которая функционально связана с интересующим нас параметром. Однако фундаментальная неопределенность, присущая квантовым системам, приводит к тому, что информация, получаемая в результате измерения, носит статистический характер, что, в свою очередь, требует многократного повторения измерений для достижения необходимой точности. Как следствие, точность измерения $\delta\lambda$ ограничена так называемым пределом дробового шума (shot-noise limit), который характеризуется масштабированием $\delta\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$, где t представляет собой время измерения.

Данное ограничение применимо не только к квантовым, но и к классическим метрологическим задачам, в которых измерение классической переменной происходит в условиях воздействия шума. В режиме высокого отношения сигнал/шум, когда полезный сигнал значительно превосходит уровень шума, возмущения, вызванные шумом, проявляются в виде флуктуаций, описываемых гауссовой статистикой при достаточно длительных измерениях в следствие справедливости центральной предельной теоремы. Это, в свою очередь, также приводит к характерному масштабированию точности измерения $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Однако, предел дробового шума не является фундаментальным ограничением на точность измерения, более строгим фундаментальным ограничением является предел Гейзенберга [1] (Heisenberg limit), который устанавливает, что точность измерения $\delta\lambda$ может масштабироваться как $\delta\lambda \propto \frac{1}{t}$. Для того, чтобы превзойти предел дробового шума и приблизиться к Гейзенберговскому пределу, необходимо использовать квантовые состояния, не имеющие классических аналогов. Одним из вариантов реализации измерений с Гейзенберговским разрешением является использование атома в качестве сенсора магнитного поля. В работе рассматривается именно этот случай. В качестве протокола измерений для такого сенсора используются алгоритмы оценки фазы, описание которых эквивалентно описанию интерферометрических измерений с использованием когерентной суперпозиции фокковских состояний, что роднит их с сенсорами, использующими интерферометрию, и показывает, что чувствительность таких сенсоров также может быть улучшена с использованием неклассических состояний света. Алгоритмы оценки фазы вообще играют ключевую роль в широком спектре квантовых алгоритмов, в частности, в алгоритме Шора, симуляции поведения квантовых систем, однако важным является и их применение в качестве самостоятельных протоколов в контексте квантовой метрологии.

Хотя создание сенсора, который бы принципиально превосходил масштабирование $\delta\lambda \propto \frac{1}{t}$, не представляется возможным, существует возможность улучшения константы, связанной с этим масштабированием, что, в свою очередь, позволяет по-

высить точность измерения при заданном времени измерения. Существует два основных подхода к достижению указанного улучшения. Первый подход основан на использовании специальных квантовых состояний, известных как частный случай максимально запутанных состояний, NOON-состояний [2]. Эти состояния представляют собой запутанные квантовые состояния, в которых d частиц находятся в суперпозиции между двумя различными ортогональными базисными состояниями, и при отсутствии шума константа в зависимости $\delta\lambda = \frac{A}{t}$ масштабируется как $A \propto \frac{1}{d}$. Однако эти состояния крайне чувствительны к воздействию шума и декогеренции, что ограничивает их практическое применение.

Второй подход к улучшению точности измерения заключается в использовании кудитов (qudit). Кудит представляет собой квантовую систему с d уровнями, где $d > 2$. Теоретически при отсутствии шума использование кудитов позволяет достичь такого же масштабирования [3] $A \propto \frac{1}{d-1}$, где d - размерность гильбертова пространства кудита. Важно отметить, что, несмотря на теоретическую эквивалентность обоих подходов, использование кудитов часто оказывается значительно проще в экспериментальной реализации, чем создание и поддержание NOON-состояний.

В рамках данной работы в качестве измеряемого параметра выступает постоянное магнитное поле, а в качестве искусственного атома используется сверхпроводниковый трансмон [4, 5], поскольку он может обладать магнитным моментом $\approx 10^5 \mu_B$, намного превосходящим магнитный момент естественных атомов. В работе проводится детальное сравнение трансмона, функционирующего в качестве сенсора постоянного магнитного поля в режиме кубита и в режиме кутрита (трехуровневой системы). В ходе эксперимента были реализованы классический алгоритм, алгоритм Китаева, алгоритм полуклассического преобразования Фурье и линейный восходящий метрологический алгоритм (LAMA - Linear Ascending Metrological Algorithm) для оценки фазы как для кубита, так и для кутрита. Полученные результаты демонстрируют, что кутритный сенсор обеспечивает более высокую точность измерения по сравнению с кубитным сенсором. Кроме того, экспериментально подтверждено, что в условиях наличия внутреннего шума сенсора протокол LAMA демонстрирует превосходство над традиционными алгоритмами Китаева и Фурье. Сравнение исследуемого в работе сенсора с альтернативными платформами, реализующими как классические, так и квантовые протоколы измерений, будет представлено в конце работы, там же будут обсуждаться вопросы улучшения чувствительности и ограничивающие факторы.

Работа состоит из трех частей. В первой обсуждаются вопросы классической и квантовой теории оценок, а также различных метрологических стратегий и конкретные способы их реализации на сверхпроводниковых искусственных атомах, а также влияния шумов на достижимую с их помощью точность. Несмотря на зрелость такой дисциплины, как математическая статистика, обзоры по математическому описанию квантовой метрологии появились относительно недавно - 10-20 лет назад. Причем изначально возможность достижения предела Гейзенберга связывалась исключительно

но с использованием запутанных состояний, однако затем было показано, что это не так. Именно поэтому литературный обзор и посвящен систематическому изложению используемых нами в эксперименте подходов. Вторая глава посвящена описанию эксперимента от экспериментальной установки до подробного описания реализованных метрологических алгоритмов оценки фазы. Третья часть посвящена анализу полученных результатов. Анализ выполняется с помощью двух основных метрик - информационной оценки и оценки по точности. Информационная оценка показывает квантовый перформанс сенсора - то есть то, как извлеченная сенсором информация о величине внешнего магнитного поля, определяемая разностью энтропии Шеннона для апостериорного распределения магнитного поля до и после измерения, зависит от общего времени набора фазы - квантового времени измерения. Эта оценка позволяет оценить "квантовость" сенсора - насколько он близок к Гейзенберговскому пределу. Оценка по точности производится для полного времени измерения и демонстрирует реальные возможности сенсора с учетом всех дополнительных факторов - времени считывания, времени инициализации кубита в основном состоянии после измерений и т.д. В этой же главе производится сравнение возможностей сенсора на сверхпроводниковых трансмонах с другими сенсорами.

1 Литературный обзор

Алгоритмы оценки фазы используются в квантовых протоколах практически повсеместно, традиционная его формулировка представляет собой задачу о нахождении собственного числа и выглядит следующим образом: пусть есть унитарный оператор U , имеющий собственное значение $e^{2\pi i\phi}$, соответствующее собственному вектору $|u\rangle$. Требуется определить собственное значение, соответствующее собственному вектору $|u\rangle$. Способ решения этой задачи на идеальном квантовом компьютере давно известен, и его можно найти в любом учебнике [6]. Достаточно воспользоваться двумя регистрами: регистром размерности, соответствующей $|u\rangle$ и регистром размерности t , в самом простом алгоритме именно t определяет точность оценки фазы и вероятность успеха алгоритма. В первом регистре готовится состояние $|u\rangle$, второй переводится в состояние равномерной суперпозиции с использованием гейта Адамара на каждом из t кубитов. Приготовление состояния $|u\rangle$ может само по себе быть трудной задачей, однако в теории для оценки фазы достаточно полиномиальной аппроксимации $|u\rangle$, но в этом случае результат становится вероятностным. В дальнейшем к первому регистру последовательно применяются управляемые U гейты в степени 2^j , где j - номер кубита второго регистра, после чего ко второму регистру применяется обратное квантовое преобразование Фурье. Измерение второго регистра дает оценку фазы с точностью 2^{-t} .

На самом деле, описанный выше алгоритм представляет лишь одну из его возможных реализаций. Существуют способы оценки, использующие всего один кубит во втором регистре, но требующие независимых измерений для различных U^{2^j} , например, алгоритм Китаева. Алгоритмы оценки фазы могут быть применены и для кудитов, это уменьшает число операций, однако существенно усложняет сами операции, поскольку реализовать управляемые кудитные гейты с необходимой точностью намного сложнее, чем кубитные.

Главным ограничивающим фактором при реализации алгоритмов оценки фазы являются шумы. Поскольку алгоритм основан на использовании фазовой когерентности, основным деструктивным фактором является чистая дефазировка. Вопрос экспоненциального превосходства квантовых вычислений над классическими во многом привязан к возможности успешной реализации алгоритмов оценки фазы в присутствии шума. Единственным, но потенциально эффективным способом борьбы с шумами является использование протоколов коррекции ошибок (QEC), и до тех пор, пока они не будут реализованы на практике для необходимого числа кубитов, ситуация, вероятно, принципиально не изменится.

Существует, однако, область применения алгоритмов оценки фазы, где возможны существенные улучшения производительности и без использования алгоритмов квантовой коррекции ошибок - квантовая метрология, хотя идеи их применения существуют, но сталкиваются с техническими ограничениями. Использование алгорит-

мов оценки фазы позволяет осуществлять измерения с фундаментальным Гейзенберговским пределом [7, 8, 9], давая возможность превзойти классические сенсоры. В роли источника фазовых сдвигов в этом случае выступает некоторый параметр системы, значение которого может быть восстановлено путем определения вызываемых им фазовых сдвигов. Простейшим примером является использование системы со спином $S = \frac{1}{2}$ для измерения постоянного магнитного поля. Частота кубита естественным образом начинает зависеть от внешнего магнитного поля за счет эффекта Зеемана, что приводит к тому, что волновая функция кубита, находящегося в состоянии суперпозиции, со временем испытывает сдвиг относительной фазы, зависящий от магнитного поля и времени эволюции. Определяя с помощью алгоритма оценки фазы этот сдвиг, становится возможным установить значение магнитного поля, а использование различных времен эволюции позволяет существенно увеличить измерительный диапазон сенсора и достичь предела Гейзенберга.

Казалось бы, ничего существенного не произошло, единственное изменение заключается лишь в том, что действие управляемых гейтов заменяется свободной эволюцией квантовой системы под действием оператора U , собственные значения которого зависят от внешнего параметра. Однако именно это и становится ключевым фактором в возможности оптимизации таких алгоритмов даже при текущем развитии квантовых вычислений. Теперь использование систем большей размерности не ограничено необходимостью реализации сложных управляющих гейтов, что позволяет существенно ускорить достижение той же точности.

Существует, однако, и другая возможность ускорения - использование нескольких кубитов. В этом случае оптимальное состояние, обеспечивающее максимально быстрый набор фазы - максимально запутанное состояние. Таким образом, существует возможность уменьшить время измерения за счет увеличения размерности гильбертового пространства сенсора, которое может быть достигнуто с помощью использования кудитов или с использованием нескольких кубитов и создания максимально запутанных состояний. В отсутствие шумов оба подхода эквивалентны.

Наличие различных шумов может приводить к различиям в эффективности подходов. Естественно, что при использовании различных платформ для реализации алгоритмов шумы будут различаться, что делает целесообразным обсуждение влияния шумов только применительно к конкретной платформе. В работе мы используем сверхпроводниковую трансмонную платформу, и применительно к ней экспериментально использование кудитов оказывается более удобным, чем использование запутанных состояний. Причина довольно проста: однокудитные операции оказываются существенно быстрее многокубитных. В случае нескоррелированных шумов время фазовой декогеренции уменьшается одинаково в обоих подходах, а скоррелированные шумы могут приводить, как к преимуществу использования запутанных состояний, так и к обратному эффекту. Определяющим для сверхпроводящей платформы с достаточно низкими временами дефазировки является всё-таки фактор различия

в длительности однокубитных и многокубитных операций.

Изложенная выше концепция является отправной точкой для дальнейшего анализа использования кудитов в качестве квантовых сенсоров, который и составляет основную часть литературного обзора. Литературный обзор будет разделен на несколько частей. В первой будут рассмотрены вопросы классической и квантовой теории оценок и их математического аппарата, на применении которого зиждется описание любого измерения, будь то классическое или квантовое. Вторая часть будет посвящена описанию параллельных и последовательных метрологических стратегий. Применение последовательной стратегии позволяет достигать Гейзенберговского предела без использования запутанных состояний и даже без использования, правда с оговорками, квантовых состояний вообще. Третья часть посвящена описанию реализации такой стратегии на сверхпроводниковых трансмонах. Наконец, в четвертой части будет проанализирован фактор влияния шумов на точность таких измерений.

1.1 Основы классической и квантовой теории оценок

Классическая и квантовая теории оценивания занимают центральное место в описании и анализе измерительных процессов, играя ключевую роль в современной физике и математической статистике. Их важность обусловлена фундаментальной необходимостью извлечения максимально точной и достоверной информации о состоянии физических систем на основе экспериментальных данных, при этом каждая из теорий отражает особенности и ограничения соответствующего физического мира — классического или квантового.

Классическая теория оценивания базируется на предположении, что состояние системы может быть описано точкой или распределением вероятностей в многомерном фазовом пространстве. Измеряемые величины в классической физике — координаты, импульсы, энергия — считаются объективными и, в принципе, могут быть определены с произвольной точностью, ограниченной лишь техническими возможностями измерительных приборов и статистическими флуктуациями. Цель классической теории — построить наилучшие оценки параметров системы, минимизируя среднюю ошибку или другие критерии качества, используя вероятностные модели и методы статистики, что необходимо при описании измерения в условиях внешнего шума.

Классическая теория оценивания применяется во множестве областей: от классической механики и статистической физики до обработки сигналов и инженерных задач. Она позволяет формализовать процесс измерения как получение выборки из вероятностного распределения и последующий анализ данных для оценки неизвестных параметров распределения. В этом контексте измерение — это процесс, который не изменяет состояние системы, а лишь раскрывает уже существующую объективную информацию.

Квантовая теория оценивания возникла как естественное расширение классиче-

ской статистики для систем, в которых фундаментально невозможно описать состояние в терминах классических вероятностных распределений. В квантовой механике состояние системы представлено волновым вектором (или матрицей плотности для открытых систем) в гильбертовом пространстве, а измерения связаны с операторами наблюдаемых величин, обладающими коммутационными соотношениями, что приводит, например, к невозможности одновременного измерения некоторых величин. Результаты измерений хоть и подчинены вероятностным законам, но эти вероятности не являются классическими — они отражают квантовую суперпозицию и принцип неопределённости.

Важность квантовой теории оценивания состоит в том, что она позволяет формально описывать и оптимизировать процесс извлечения информации из квантовых систем, учитывая их уникальные свойства: невозможность копирования квантового состояния, влияние измерения на состояние, а также наличие квантовых корреляций и запутанности. Квантовая теория оценивания использует формализм положительных операторов POVM, которые обобщают классические вероятностные меры и позволяют описывать самые общие виды квантовых измерений.

Эта теория имеет критическое значение для развития квантовых технологий — квантовых вычислений, квантовой связи и квантовой сенсорики, где точность и эффективность измерений напрямую влияют на производительность и надёжность устройств. Квантовая теория оценивания формирует математическую основу для разработки оптимальных стратегий измерения, минимизации ошибок и построения квантовых алгоритмов коррекции ошибок.

1.1.1 Классическая теория оценок и граница Крамера–Рао

Классическая теория оценивания занимается построением оценок неизвестных параметров распределения вероятностей на основе наблюдаемых данных. Пусть задано семейство распределений

$$\{P_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}, \quad (1)$$

а $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ — выборка из независимых одинаково распределённых случайных величин с плотностью $f(x; \theta)$. Задача состоит в построении оценок $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$, которые приближают истинное значение параметра θ . Рассмотрим основные свойства оценок. Здесь и в дальнейшем усреднение по распределению вероятности при фиксированном параметре θ обозначается символом \mathbb{E}_θ . Оценка называется несмещённой, если:

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (2)$$

В противном случае оценка называется смещённой и вводят смещение, которое в общем случае является функцией параметров распределения:

$$b(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] - \theta. \quad (3)$$

Оценка называется состоятельной, если при увеличении объема выборки результат оценки асимптотически сходится по вероятности к истинным значениям параметров:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta, \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

или в эквивалентной формулировке,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5)$$

Оценка $\hat{\theta}_1$ называется эффективной в классе оценок K , если для любой другой оценки $\hat{\theta}_2$ из класса K выполнено соотношение:

$$\mathbb{E}_\theta [(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] \leq \mathbb{E}_\theta [(\hat{\theta}_2 - \theta)^2], \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (6)$$

Оценка называется асимптотически эффективной, если это равенство выполняется асимптотически с увеличением объема выборки. Под классом оценок понимается некоторое множество оценок, в частности, в общем случае под ним можно понимать множество функций от стохастических переменных, обладающих свойством измеримости (в смысле меры Лебега) и принимающих значения в заданном пространстве параметров Θ . Оценка называется асимптотически нормальной, если при увеличении объема выборки n распределение нормированной ошибки случайной величины $\hat{\theta}_n$ стремится к нормальному распределению:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V(\theta)), \quad (7)$$

где $V(\theta)$ - ковариационная матрица оценки, а d обозначает сходимость по распределению.

Одним из важнейших методов построения оценок является метод максимального правдоподобия (MLE, Maximum Likelihood Estimation). Его идея заключается в том, чтобы выбрать в качестве оценки параметра θ значение, при котором вероятность наблюдаемых данных максимальна. Для этого вводится функция правдоподобия:

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta). \quad (8)$$

Заметим, что она не является совместной плотностью вероятности, хотя и определена через совместную плотность вероятности независимых событий. Эта функция определена в пространстве параметров распределения, которые не являются случайными величинами, но при этом сама функция, как функция еще и выборки, является случайной величиной. Координаты максимума этой функции в пространстве параметров распределения будут использоваться в качестве оценки. Для упрощения вычислений обычно используют логарифмическую функцию правдоподобия, кото-

рая в силу монотонности имеет максимум в той же точке, что и исходная функция правдоподобия:

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta; X) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; \theta). \quad (9)$$

Оценка максимального правдоподобия определяется как:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta). \quad (10)$$

Метод MLE широко применяется на практике благодаря ряду положительных свойств. При выполнении условий регулярности он обеспечивает: асимптотическую несмещённость, состоятельность и асимптотическую нормальность оценки. Условия регулярности представляют собой следующие условия на функцию распределения (плотность функции распределения): 1) Область, в которой функция (плотность распределения) обращается в 0, не зависит от значения параметров. 2) Дифференцирование интеграла эквивалентно интегралу от производной, то есть допустимо дифференцирование под знаком интеграла. 3) Вторая производная логарифма функции правдоподобия (информация Фишера) не обращается в 0 или в бесконечность. Помимо этого требуется существование производных функции распределения по параметру вплоть до третьей.

Так же можно показать, что такая оценка является асимптотически эффективной и достигает границы Крамера-Рао. Важно подчеркнуть, что в реальных приложениях, особенно в задачах метрологии и физики, несмещённые оценки предпочтительны, поскольку они в среднем воспроизводят истинные значения параметров. Метод максимального правдоподобия позволяет строить такие оценки в широком классе моделей.

Переходя к фундаментальному ограничению точности - границе Крамера-Рао, введём понятие информации Фишера:

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X; \theta) \right)^2 \right], \quad (11)$$

которая описывает чувствительность распределения к изменению параметра. Тогда для любой оценки при выполнении условий регулярности справедливо неравенство Крамера-Рао:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}) \geq \frac{(1 + b'(\theta))^2}{I_n(\theta)}. \quad (12)$$

Информация Фишера аддитивна при независимых наблюдениях:

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta), \quad (13)$$

что приводит к классическому пределу точности:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}) \propto \frac{1}{n}. \quad (14)$$

При выполнении условий регулярности оценка, полученная методом максимального правдоподобия, достигает этой границы асимптотически:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{MLE}} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_n^{-1}(\theta)). \quad (15)$$

В многомерном случае соотношение (12) становится матричным, а знак неравенства понимается в смысле положительной определенности оператора [10]. Это фундаментальное ограничение классической теории оценок в случае выполнения условий регулярности. При невыполнении этих условий могут существовать оценки, превосходящие границу Крамера-Рао. Такие оценки называются сверхэффективными. Примером такой оценки является, например, оценка через максимальное значение параметра бета-распределения с областью определения, зависящей от этого самого параметра.

В реальных задачах метрологии, естественно, условия регулярности выполняются, а ограничения на область определения в постановке зачастую вообще отсутствуют. Помимо этого, можно показать, что смещённые оценки могут превосходить несмещённые оценки лишь локально, но не во всём пространстве параметров. Соответственно, в некоторой области параметров они оказываются хуже несмещённых оценок.

Таким образом, граница Крамера-Рао - фундаментальный предел классической метрологии, причиной которого является независимость проведённых измерений. Этот предел может быть преодолен с использованием квантовых эффектов, что будет рассматриваться ниже.

К сожалению, граница Крамера-Рао ничего не говорит о возможности и способе конструирования эффективных оценок, однако в некоторых случаях метод максимального правдоподобия приводит к асимптотически эффективным оценкам. В заключении мы и рассмотрим условие, при котором граница Крамера-Рао достигается с помощью метода максимального правдоподобия. Оно имеет вид:

$$\hat{\theta}(x) - \theta = a(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta; x), \quad (16)$$

Тогда интегрирование по θ дает:

$$\ell(\theta; x) = \hat{\theta}(x)\eta(\theta) + d(\theta) + \ln h(x), \quad (17)$$

Следовательно:

$$L(\theta; x) = h(x) \exp(\eta(\theta)\hat{\theta}(x) + d(\theta)), \quad (18)$$

Это условие выполняется во многих практически важных случаях, например, в случае оценки вероятности в биномиальном распределении или среднего в распределении Гаусса.

1.1.2 Квантовая теория оценок и квантовая граница Крамера-Рао

После рассмотрения основных аспектов классической теории оценок естественно перейти к рассмотрению квантового случая. Квантовая теория оценок [11, 12, 13] — это расширение классической теории статистического оценивания, учитывающее фундаментальные особенности квантовых систем. В квантовой механике любое измерение может быть описано с помощью полного набора положительных операторов в Гильбертовом пространстве (POVM-формализм):

$$\sum_{\epsilon} \hat{E}(\epsilon) = \hat{1} \quad (19)$$

Вероятность результата ϵ определяется как:

$$P(\epsilon) = \text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{\rho}_{\theta}] \quad (20)$$

В классическом случае коммутационные соотношения отсутствуют, это можно мыслить как квантовомеханическое описание, в котором все матрицы имеют диагональный вид. Таким образом, в классическом случае фактор влияния выбора измерительного базиса на точность оценки в принципе отсутствует, единственное, что может влиять на точность — это выбор измеряемой величины и связанные с её измерением шумы. В квантовом случае ситуация принципиально иная, здесь существует альтернатива в выборе измерительного базиса. В таком случае естественным представляется ввести величину, отвечающую максимально возможной информации Фишера с точки зрения оптимизации измерительного базиса. Эта величина называется квантовой информацией Фишера и определяется следующим образом:

$$\mathcal{I}_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \max_{\{\hat{E}(\epsilon)\}} \mathcal{I}[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}(\epsilon)\}]. \quad (21)$$

Можно показать, что квантовая информация Фишера по аналогии с классической может быть определена через среднее квадрата логарифмической производной:

$$\mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_{\theta}] = \text{Tr}[\hat{\rho}_{\theta}\hat{L}_{\theta}^2] \quad (22)$$

где \hat{L}_{θ} — оператор логарифмической производной, определяемый как:

$$\frac{d\hat{\rho}_{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}_{\theta}\hat{L}_{\theta} + \hat{L}_{\theta}\hat{\rho}_{\theta}) \quad (23)$$

Квантовая граница Крамера–Рао (QCRB) ограничивает дисперсию оценки снизу:

$$(\Delta\theta)^2 \geq \frac{1}{\mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_\theta]}, \quad (24)$$

при этом квантовая информация Фишера обладает следующими свойствами:

• **Выпуклость:**

$$\mathcal{I}_Q \left[\sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k \right] \leq \sum_k \gamma_k \mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_k] \quad (25)$$

• **Аддитивность** для независимых систем:

$$\mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2] = \mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_1] + \mathcal{I}_Q[\hat{\rho}_2] \quad (26)$$

Свойство выпуклости иллюстрирует тот факт, что чистое состояние всегда содержит больше информации об измеряемом параметре, чем смешанное состояние. Таким образом, естественным представляется рассмотрение квантовой границы Крамера–Рао для случая чистого состояния. В случае чистого состояния $\hat{\rho}_\theta = |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|$, квантовая информация Фишера выражается как:

$$F_Q[|\psi(\theta)\rangle] = 4 \left(\langle \partial_\theta \psi | \partial_\theta \psi \rangle - |\langle \psi | \partial_\theta \psi \rangle|^2 \right) \quad (27)$$

При унитарной эволюции матрица плотности системы зависит от измеряемого параметра следующим образом:

$$\hat{\rho}_\theta = e^{-i\theta\hat{H}} \hat{\rho}_0 e^{i\theta\hat{H}} \quad (28)$$

Тогда в случае чистых состояний имеем:

$$F_Q[|\psi_0\rangle, \hat{H}] = 4(\Delta\hat{H})^2 \quad (29)$$

Для сепарабельного состояния из N частиц это приводит к классическому пределу:

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{N}|h_{\max} - h_{\min}|} \quad (30)$$

Для запутанных состояний возможна асимптотика:

$$\Delta\theta = \frac{1}{N|h_{\max} - h_{\min}|} \quad (31)$$

— так называемый Гейзенберговский предел.

Этот предел достигается только при использовании квантово-коррелированных состояний, например, NOON-состояний и лежит в основе квантовых преимуществ в метрологии. Именно квантовая информация Фишера и характеризует полезную за-

путанность, которая может быть использована как ресурс для приближения к Гейзенберговскому пределу.

Вообще говоря, любые квантовые вычисления используют запутанность как ресурс, позволяющий выиграть время. На самом деле, для достижения Гейзенберговского предела обязательно использование запутанных состояний. Мы вернёмся к этому вопросу чуть позже, когда будем обсуждать последовательные и параллельные стратегии, пока же зафиксируем тот факт, что квантовая механика даёт корневой выигрыш в ресурсах для квантовой метрологии, и его получение возможно с помощью использования запутанных состояний.

1.1.3 Байесовский подход

Описанный выше метод максимального правдоподобия является точечной оценкой. Точно такими же точечными оценками являются многие нерассмотренные нами оценки, например, метод моментов. Однако такие точечные оценки практически всегда оказываются несмещёнными и эффективными лишь асимптотически, поскольку эти свойства являются следствием центральной предельной теоремы. На практике же скорость сенсора является важной характеристикой и зачастую выборка существенно ограничена и содержит довольно малое число наблюдений. Существует, однако, подход, позволяющий отойти от парадигмы точечных оценок и перейти к парадигме поэтапного обновления знаний об измеряемом параметре на основании новой информации, поступающей в результате измерения. Этот подход называется Байесовским методом оценки.

Байесовский метод оценки представляет собой формализм, позволяющий строить выводы о неизвестных параметрах статистической модели путём систематического обновления знаний на основе вновь поступающих данных. В основе этого подхода лежат формула Байеса и понятие условной вероятности. Они объединяют априорное знание о параметре с информацией, извлекаемой из наблюдаемых данных, образуя тем самым апостериорное распределение. Это распределение является центральным объектом дальнейшего анализа.

Принципиальным отличием является тот факт, что в частотной статистике параметры считаются фиксированными, но неизвестными числами, а данные — случайными величинами. Задача сводится к нахождению одного числа, которое является оценкой этого параметра на основе выборки. В байесовском подходе параметр θ рассматривается как случайная величина, а сама неопределённость относительно его значения выражается непосредственно через априорное и апостериорное распределения.

Одним из наиболее значимых идейных отличий байесовского подхода является трактовка вероятности как степени уверенности, а не как частоты наступления события в бесконечном числе повторений. Это позволяет использовать вероятность для выражения неопределённости относительно фиксированного, но неизвестного пара-

метра.

Априорное распределение, в этом смысле, есть количественная мера нашего невежества. С накоплением данных эта мера уменьшается, и апостериорное распределение сужается, фокусируясь на наиболее вероятных значениях параметра. Такое поэтапное уточнение знаний делает байесовский подход особенно мощным в условиях малых выборок и динамически обновляющейся информации. Такой подход позволяет оценивать доверительные интервалы, погрешности и вероятности ошибок, исходя из свойств апостериорной функции распределения для параметра θ .

Перейдем к более детальному рассмотрению Байесовского подхода. Начнем с рассмотрения условной вероятности:

$$P(\varepsilon, \varphi) = P(\varepsilon | \varphi)P(\varphi), \quad (32)$$

где $P(\varepsilon, \varphi)$ - совместная вероятность (плотность вероятности) случайных величин ε и φ , а $P(\varepsilon | \varphi_0)$ представляет собой условную вероятность - вероятность (плотность вероятности) случайной величины ε при условии, что наступило событие $\varphi = \varphi_0$ (в непрерывном случае событием является попадание в окрестность заданной точки).

Формула (32) может быть применена и в другую сторону:

$$P(\varphi, \varepsilon) = P(\varphi | \varepsilon)P(\varepsilon) \quad (33)$$

Приравнивая два выражения, получим:

$$P(\varphi | \varepsilon) = \frac{P(\varepsilon | \varphi)P(\varphi)}{P(\varepsilon)}, \quad P(\varepsilon) = \int_a^b P(\varepsilon | \varphi)P(\varphi) d\varphi. \quad (34)$$

Это и есть ключевое соотношение для Байесовского подхода - формула Байеса. Применительно к задаче оценки параметра, пусть в данном случае это будет φ , это означает следующее. Распределение $P(\varphi | \varepsilon)$ - это и есть апостериорное распределение, то есть распределение, полученное в результате увеличения известной нам информации о параметре φ в результате измерения, где случайная величина ε описывает результат измерения. То есть таким образом мы уменьшаем наше невежество, связанное с оценкой параметра φ , основываясь на полученном результате измерения.

Распределение $P(\varphi)$ есть априорное распределение для параметра φ , оно отражает знания о значении оцениваемого параметра до проведения измерения. Величина $P(\varepsilon | \varphi)$ отражает распределение результатов измерения при заданном φ , это замыкает модель.

Таким образом, Байесовский подход позволяет развить итеративную процедуру, стартующую с некоторого изначального распределения $P(\varphi)$, как правило равномерного, так как никакой информации об оцениваемом параметре до измерения неизвестно, и имеющую заданные распределения при каждом значении параметра - задана модель системы. Далее по мере выполнения измерений распределение уточ-

няется с помощью формулы Байеса, причем на место $P(\varphi)$ встает апостериорное распределение, полученное на предыдущем шаге. По завершении измерения результатом является распределение параметра φ , из которого извлекаются оптимальное значение параметра и отклонения для разных доверительных интервалов.

В качестве оценки может использоваться, например, среднее значение:

$$\hat{\theta}(\varepsilon) = \int_a^b \varphi P(\varphi | \varepsilon) d\varphi \quad (35)$$

или же максимально вероятное:

$$\hat{\theta}(\varepsilon) = \arg \max_{\varphi \in [a, b]} P(\varphi | \varepsilon). \quad (36)$$

Отклонения и доверительные интервалы в Байесовском подходе рассчитываются с помощью их определений и апостериорного распределения вероятности. Вероятность того, что φ принадлежит интервалу Ω определяется по формуле:

$$P(\varphi \in \Omega | \varepsilon) = \int_{\Omega} P(\varphi | \varepsilon) d\varphi \quad (37)$$

Таким образом, можно рассчитывать доверительные интервалы для любого заданного отклонения:

$$P(\varphi \in [\hat{\theta}(\varepsilon) - \Delta, \hat{\theta}(\varepsilon) + \Delta] | \varepsilon) = \int_{\hat{\theta}(\varepsilon) - \Delta}^{\hat{\theta}(\varepsilon) + \Delta} P(\varphi | \varepsilon) d\varphi \quad (38)$$

Обращение этого соотношения позволяет определять квантили.

В работе при измерении постоянного магнитного поля используется именно Байесовский подход. В качестве оценки параметра используется наиболее вероятное значение, а для анализа точности сенсора - квантили точности, полученные из апостериорного распределения.

Для завершения анализа остается только показать, что с ростом числа выборки Байесовский подход и точечные оценки дают одинаковую точность. Асимптотически с ростом числа выборки при Байесовском подходе апостериорное распределение сходится к некоторому нормальному распределению. Этот факт составляет содержание теоремы Берштейна-фон Мизеса (BvM), которая в зависимости от размерности пространства параметров определяет достаточный для приближенной нормальности размер выборки.

Предположим, что $P(\varphi | \varepsilon)$ не обращается в ноль и имеет производные всех порядков. Тогда после экспоненцирования можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора вблизи наиболее вероятного значения параметра:

$$P(\varphi | \varepsilon) = \exp \left[\ln P(\varphi_{\max} | \varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \ln P(\varphi | \varepsilon)}{d\varphi^k} \right|_{\varphi=\varphi_{\max}} (\varphi - \varphi_{\max})^k \right] \quad (39)$$

Первое слагаемое вносит вклад только в нормировку, поэтому остановимся на рассмотрении остальных. После тривиальных подстановок получим:

$$P(\varphi | \varepsilon) \propto \exp \left[-\frac{I(\varepsilon)}{2} (\varphi - \varphi_{\max})^2 \right] \prod_{k>2} \exp \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k \ln P(\varphi | \varepsilon)}{d\varphi^k} \Big|_{\varphi=\varphi_{\max}} (\varphi - \varphi_{\max})^k \right], \quad (40)$$

где:

$$I(\varepsilon) \equiv \frac{d^2 \ln P(\varphi | \varepsilon)}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_{\max}} \quad (41)$$

Здесь уже очевидна аналогия с методом максимального правдоподобия и его асимптотической нормальностью, а величина $I(\varepsilon)$, очевидно, существенно положительна, описывает остроту пика и напоминает информацию Фишера, однако доказательство нужно проводить аккуратно. Рассмотрим m независимых измерений, тогда:

$$P(\varphi | \varepsilon) \propto \prod_{i=1}^m P(\varphi | \varepsilon_i), \quad (42)$$

что может быть переписано в виде:

$$P(\varphi | \varepsilon) \propto \prod_{\varepsilon} [P(\varphi | \varepsilon)]^{m \frac{m\varepsilon}{m}}. \quad (43)$$

Асимптотически при больших m отношение $\frac{m\varepsilon}{m}$ с точки зрения принципа устойчивости частот определяет вероятность определенного исхода измерений при фиксированном внешнем параметре, то есть $\frac{m\varepsilon}{m} \rightarrow P(\varepsilon | \theta)$. Тогда:

$$\frac{1}{m} \ln P(\varphi | \varepsilon) \rightarrow \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon | \varphi_0) \ln P(\varphi | \varepsilon) + \text{const}. \quad (44)$$

Теперь, компилируя этот результат с соотношением (41), получаем, что $I(\varepsilon) = mF$, где:

$$F = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon | \varphi_0) \frac{d^2 \ln P(\varphi | \varepsilon)}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_{\max}} \quad (45)$$

В результате получаем асимптотическую нормальность для апостериорного распределения:

$$P(\varphi | \varepsilon) \propto \exp \left[-\frac{mF}{2} (\varphi - \hat{\theta}_{\max})^2 \right], \quad m \gg 1. \quad (46)$$

Дополнительные вклады в формуле (39) малы в силу того, что из предыдущего соотношения следует $|\varphi - \hat{\theta}_{\max}| \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$, то есть для каждого k вклад $\propto \frac{1}{m^{\frac{k}{2}+1}}$, что дает малый в сравнении с основным слагаемым вклад при больших m . Это же условие позволяет сделать оценку достаточного объема выборки для применения асимптотической теории. В заключении рассчитаем величину F , для этого продифференцируем

и применим формулу Байеса:

$$\frac{d}{d\varphi} \ln P(\varphi | \varepsilon) = m \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon | \theta) \left(\frac{1}{P(\varepsilon | \varphi)} \frac{dP(\varepsilon | \varphi)}{d\varphi} \right) + \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} \quad (47)$$

Это соотношение показывает, что в случае $\frac{dP(\varphi)}{d\varphi} = 0$ наиболее вероятное значение апостериорного распределения совпадает асимптотически с максимумом функции правдоподобия. Заметим, что изначального равномерного распределения равенство $\frac{dP(\varphi)}{d\varphi} = 0$ для всего пространства параметров, таким образом в этом случае оценка через наиболее вероятное значение асимптотически совпадает с оценкой максимального правдоподобия и, соответственно, наследует все её свойства: несмещенность, состоятельность и асимптотическую эффективность. Выражение для величины F имеет вид:

$$F = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{P(\varepsilon | \varphi)} \left(\frac{dP(\varepsilon | \varphi)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{d^2 P(\varphi)}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi}, \quad (48)$$

что при априорном равномерном распределении совпадает с информацией Фишера. Таким образом, итоговое распределение имеет вид:

$$P(\varphi | \varepsilon) = \sqrt{\frac{mF(\theta)}{2\pi}} \exp \left[-\frac{mF(\theta)}{2} (\varphi - \theta)^2 \right] \quad (49)$$

В заключении стоит отметить, что Байесовский подход имеет одинаковую асимптотическую эффективность в сравнении с точечными оценками, оставаясь удобным и при работе с небольшими выборками. Именно использование Байесовского подхода позволяет достигать Гейзенберговского предела без использования запутанности с помощью последовательной метрологической стратегии. К подробному анализу этой стратегии и вообще метрологических стратегий в целом мы и приступаем.

1.2 Конверсия время - запутанность, последовательная и параллельная метрологические стратегии

В последние годы квантовые системы всё чаще рассматриваются как перспективная основа для прецизионных измерений, позволяющих существенно повысить точность и чувствительность сенсоров по сравнению с классическими подходами. Одним из ключевых факторов, обеспечивающих эти преимущества, традиционно считается возможность использования квантовой запутанности. В предыдущей главе было показано, что запутанные состояния, обладающие так называемой полезной запутанностью, позволяют выходить за рамки возможностей классических сенсоров и достигать Гейзенберговского предела точности.

Однако остается вопрос о том, является ли запутанность единственным фундаментальным ресурсом квантовой метрологии? На самом деле, существует способ достигать предела Гейзенберга без привлечения запутанных состояний и даже без ис-

пользования неклассических состояний вообще[14]. Квантовая когерентность — способность системы сохранять определённую фазовую связь между состояниями — сама по себе может быть использована как ресурс при реализации высокоточных измерений. Именно этому подходу, основанному на последовательной стратегии измерений, и посвящена эта часть литературного обзора. Будет показано, что использование последовательной стратегии позволяет существенно расширить возможности сенсоров, поскольку для применения таких сенсоров отсутствует необходимость в генерации многочастичных максимально запутанных состояний, что является трудной задачей для текущего уровня развития квантовых технологий.

Однако, прежде чем сравнить два различных подхода, необходимо иметь формализм, которым они описываются, а также ввести понятие затраченных ресурсов. Любая метрологическая последовательность описывается с помощью формализма квантового канала, однако ресурсы определяются по-разному. Параллельная стратегия предполагает использование m независимых ансамблей из N частиц, тогда в оптимальном случае, как это следует из первой части этой главы, точность измерения масштабируется как:

$$\delta\phi \propto \frac{1}{N\sqrt{m}}. \quad (50)$$

В этом случае эволюция системы описывается соотношением:

$$[\hat{\rho}_0^{(N)}]^{\otimes m} \rightarrow [\hat{F}_\theta(\hat{\rho}_0^{(N)})]^{\otimes m} = \hat{\rho}_\theta, \quad (51)$$

а ресурс определяется как $R = mN$. Основным ресурсом здесь, безусловно, является квантовая запутанность, именно она обеспечивает достижение Гейзенберговского предела:

$$\delta\phi = \frac{\delta_0\sqrt{m}}{R}. \quad (52)$$

В случае последовательной стратегии используются m ансамблей, которые подвергаются воздействию квантового канала N раз, тогда эволюция будет описываться соотношением:

$$[\hat{\rho}_0]^{\otimes m} \rightarrow [\hat{F}_\theta^N(\hat{\rho}_0)]^{\otimes m} = \hat{\rho}_\theta. \quad (53)$$

Ресурс в этом случае определяется аналогично - как $R = mN$, давая точно такую же зависимость в точности, однако теперь основным ресурсом является время взаимодействия без сбоя фазы - когерентность. При отсутствии шумов оба подхода оказываются одинаково эффективными, таким образом, существует эквивалентность между длительностью взаимодействия сенсора с измеряемым объектом и квантовой запутанностью с точки зрения ресурсов.

1.2.1 Параллельная стратегия

Достижение Гейзенберговского предела в квантовой метрологии с помощью параллельной стратегии тесно связано с фундаментальными ограничениями, накладывае-

мыми на точность оценки параметров квантовыми законами, и формализуется через границу Крамера-Рао [15, 16, 17, 18].

Граница Крамера-Рао, как уже было показано ранее, - это асимптотическая нижняя граница точности оценки параметра, которая выражается через квантовую информацию Фишера. Формально, для оценки параметра ϕ предельная точность, достижимая с помощью несмещенных оценок, ограничена неравенством:

$$\Delta^2 \phi \geq \frac{1}{m F_Q^N}, \quad (54)$$

где m описывает число независимых измеряемых ансамблей, а F_Q^N , как было показано, в случае использования оптимальных запутанных состояний масштабируется как:

$$F_Q^N \propto \frac{1}{N^2}, \quad (55)$$

давая для точности зависимость:

$$\Delta \phi = \frac{\delta_0}{\sqrt{m} N} = \frac{\delta_0 \sqrt{m}}{R}, \quad (56)$$

обеспечивая Гейзенберговский предел по числу затраченных ресурсов: $\Delta \phi \propto \frac{1}{R}$. При реализации данной стратегии, очевидно, принципиально использование существенно неклассических запутанных состояний.

1.2.2 Последовательная стратегия

Достижение Гейзенберговского предела в квантовой метрологии с помощью последовательной стратегии связано с использованием адаптивных методов оценки, которые, на самом деле, имеют, скорее, классическую природу [19, 20, 21]. В самом начале литературного обзора обсуждалась классическая граница Крамера-Рао, на основании которой был сделан вывод о наилучшей возможной точности оценки при условии независимости измерений. Однако никаких принципиальных препятствий для того, чтобы сделать последующие измерения, основанными на результатах предыдущих, естественно, не существует.

Без применения адаптивного подхода достижение Гейзенберговского предела, хотя и увеличивает точность измерений в N раз, уменьшает при этом рабочий диапазон сенсора в те же N раз. Сказанное, разумеется, верно как для последовательной, так и для параллельной стратегии. Это связано с тем, что диапазон измерений в случае интерферометрии ограничен периодом колебаний - диапазоном значений измеряемого параметра, в пределах которого разность фаз интерферометра изменяется на 2π . Увеличивая время измерения в N раз или используя N запутанных атомов, мы пропорционально уменьшаем период колебания, то есть существенно снижаем измерительный диапазон сенсора. Более того, многократные повторяющиеся измерения с увеличенным временем взаимодействия сенсора с измеряемой системой или уве-

личным числом частиц описываются классической границей Крамера-Рао и по сути обеспечивают выигрыш только за счет уменьшения измерительного диапазона, поскольку дальнейшее увеличение точности при увеличении времени измерения полностью классическое.

Использование адаптивных методов позволяет обойти это ограничение. В этом случае минимально достижимая ошибка, безусловно, перестает описываться глобальной границей Крамера-Рао, которая по существу является асимптотической границей точности при повторяющихся измерениях. В случае адаптивного подхода измерительный диапазон параметра, а также измерительные базисы могут существенно различаться для разных шагов алгоритмов. Более того, их выбор для последующих шагов основывается на результатах предыдущих шагов, что, конечно, противоречит условиям регулярности, использованным при обосновании границы Крамера-Рао.

Теоретически, подобный подход применим для любых состояний, в том числе и для когерентных состояний, которые являются максимально близкими к классическим. Когерентные состояния, однако, имеют изначальную неопределенность в фазе $\Delta\phi \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$, где n — среднее число частиц. Любая метрологическая стратегия ограничена временами когерентности состояния, то есть временем когерентного взаимодействия с измеряемой подсистемой $t \propto N$ сильно ограничено. Для когерентных состояний в случае небольшого числа $n \sim 1$ неопределенность $\Delta\phi \geq \frac{1}{N\sqrt{n}}$ хоть и уменьшается в N раз, однако, как мы это уже обсуждали, только за счет уменьшения измерительного диапазона. Это верно для любых используемых состояний, но именно в случае когерентного состояния контрастность интерференционной картины становится приемлемой лишь при достаточно больших n . Это означает, что при малом числе фотонов адаптивный подход в случае когерентных состояний неэффективен по причине плохой видности интерференционной картины, то есть невозможности эффективно различать минимумы и максимумы интерференционной картины.

В случае увеличения числа частиц возникает другая проблема: время когерентности уменьшается по закону $\tau_{coh} \propto \frac{1}{n}$, таким образом, предельная точность ухудшается с увеличением среднего числа фотонов - $\Delta\phi \propto \sqrt{n}$. Таким образом, хотя теоретически использование когерентных состояний дает возможность приближаться к Гейзенберговскому пределу, практически описанная выше проблема приводит к существенному ухудшению как константы A , так и показателя степени a в зависимости точности измерения от времени измерения $\delta\phi = \frac{A}{t^a}$.

Использование неклассических состояний позволяет изменить эту ситуацию за счет использования состояний с хорошо определённой фазой. Именно для этого их применение и необходимо при практической реализации последовательной стратегии. Применение когерентных состояний теоретически позволяет достигать Гейзенберговского предела, однако практически их использование не является оптимальным - таким состояниям, по-простому говоря, не хватает когерентности. Использование сжатых состояний или одночастичных суперпозиций, имеющих хорошо определённую

ную фазу, существенно повышает эффективность измерения за счет существенного улучшения контрастности интерференционной картины и позволяет практически приблизиться к достижению Гейзенберговского предела.

В адаптивных стратегиях, как правило, используется Байесовский подход. Он представляет собой мощный статистический метод, основанный на обновлении апостериорного распределения параметра на основе результатов измерений. Идея адаптивных протоколов заключается в том, что после каждого измерения мы имеем текущее знание о параметре в виде вероятностного распределения, которое затем используется для оптимального выбора следующего измерения с целью максимизации извлекаемой информации.

В качестве меры извлекаемой информации служит разность энтропии Шеннона до и после проведенного измерения. Усредняя её по различным результатам измерений и максимизируя результат, можно определить оптимальное время задержки для следующего измерения.

Если предположить, что на каждом шаге алгоритма - при фиксированной задержке интерферометра - проводится много измерений или одно измерение для ансамбля из большого числа частиц, то в этом случае возможно аналитическое рассмотрение, основанное на центральной предельной теореме и аппроксимацией получаемых распределений суммой гауссовых. В результате можно показать, что протоколы оценки фазы для таких случаев могут асимптотически (при большом числе шагов) достигать Гейзенберговского предела.

В работе намеренно не приводятся эти выкладки, чтобы не загромождать описание, поскольку в нашей работе такое описание неприменимо. Это связано с тем, что зачастую на каждом шаге проводятся лишь несколько измерений (≤ 5), что, безусловно, не описывается центральной предельной теоремой. Теоретическое рассмотрение таких ситуаций и оптимизация подобных алгоритмов в этом случае может быть осуществлена только численно. Подробному описанию применения последовательной стратегии к измерению магнитного поля сверхпроводящими кубитами посвящена следующая часть литературного обзора, поскольку по этой тематике существует довольно много свежих работ примерно 5-10-летней давности, демонстрирующих несколько новых подходов к улучшению алгоритмов оценки фазы в контексте квантовой метрологии и анализирующих их эффективность с помощью численного моделирования.

1.3 Реализация последовательной стратегии на сверхпроводящих искусственных атомах

Последовательные метрологические стратегии имеют широкий спектр применений в задачах квантовой метрологии. В этой части главы мы рассмотрим их применительно к измерению магнитного поля искусственным атомом с помощью алгоритмов оценки фазы. В качестве искусственных атомов в работе используются сверхпро-

водниковые трансмоны, которые могут обладать огромным магнитным моментом $\mu \sim 10^5 \mu_B$, что делает их привлекательными для прецизионной магнитометрии.

Особое внимание в нашей работе уделяется использованию трансмонов в кудитном режиме. Кудиты - искусственные атомы с размерностью Гильбертова пространства $d > 2$ - обеспечивают улучшенную точность измерений за счёт более сложной структуры состояний и возможности реализации более эффективных протоколов оценки фазы. Теоретически в отсутствии шума использование d -уровневой системы приводит к улучшению константы в зависимости точности от времени $\delta\phi = \frac{A}{t}$ по закону: $A \propto \frac{1}{d-1}$. Примечательно, что такой подход является простым и эффективным решением, не требующим генерации максимально запутанных состояний и многокубитных операций. При этом использование альтернативного подхода - применение параллельной стратегии с использованием NOON состояний из d кубитов, для реализации которого требуется максимально запутанное состояние, а следовательно и многокубитные операции, приводит к аналогичному улучшению $A \propto \frac{1}{d}$. Реализация многокубитного запутанного состояния в условиях декогеренции и конечной длительности операций представляется малоэффективной по сравнению с кудитным подходом, поскольку при его использовании с ростом размерности увеличивается время управляющих операций при уменьшающемся времени жизни состояния, в то время как в кудитном случае при таком же уменьшении времени жизни длительность операций не увеличивается по сравнению с длительностью однокубитных.

В этой части литературного обзора будет приведено описание поведения трансмона во внешнем постоянном магнитном поле, будут рассмотрены возможности реализаций кубитных и кутритных алгоритмов оценки фазы, а также оптимизация их параметров. Также будет рассмотрен способ генерации управляющих импульсов, который позволяет не увеличивать длительность управляющей операции по сравнению с длительностью однокубитных операций.

1.3.1 Сверхпроводниковый трансмон во внешнем магнитном поле

Трансмон представляет собой сверхпроводниковый искусственный атом, состоящий из джозефсоновского контакта, а в общем случае - из DC-SQUID, шунтированного достаточно большой ёмкостью. Он описывается Гамильтонианом вида:

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J(\Phi) \cos(\hat{\varphi}), \quad (57)$$

где:

- \hat{n} — оператор числа протуннелировавших между островками куперовских пар,
- $\hat{\varphi}$ — оператор относительной фазы между островками,
- $E_C = \frac{e^2}{2C}$ — зарядовая энергия,

- n_g — переменная, описывающая флуктуации наведенного на емкость заряда, например из-за влияния подложки,
- $E_J(\Phi)$ — джозефсоновская энергия, зависящая от внешнего магнитного потока Φ .

Для асимметричного DC-SQUID джозефсоновская энергия зависит от магнитного потока:

$$E_J(\Phi) = E_{J\Sigma} \sqrt{\cos^2 \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + a^2 \sin^2 \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)}, \quad (58)$$

где $E_{J\Sigma} = E_{J1} + E_{J2}$ — суммарная энергия двух джозефсоновских переходов, $a = \frac{E_{J1} - E_{J2}}{E_{J\Sigma}}$ — фактор асимметрии, Φ_0 — сверхпроводящий квант магнитного потока.

У Гамильтониана трансмона существует точное решение задачи о нахождении собственных функций, выражающееся в виде функций Маттьё, однако в случае трансмона ($\frac{E_J}{E_C} \geq 50$) достаточно ограничиться рассмотрением нескольких первых членов разложения косинуса в ряд и теории возмущений. Таким образом, спектр трансмона имеет вид:

$$E_n \approx \sqrt{8E_C E_J(\Phi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{12} (6n^2 + 6n + 3), \quad (59)$$

Таким образом, из формулы (59) видно, что трансмон имеет частоту, зависящую от магнитного поля через джозефсоновскую энергию и ангармонизм, равный E_C . Это позволяет реализовать с его помощью прецизионную магнитометрию с помощью протоколов оценки фазы. Более того, это позволяет использовать его в кудитном режиме, поскольку от магнитного поля зависит только общая частота трансмона, но не ангармонизм. То есть для любой размерности Гильбертова пространства действие слабого магнитного поля описывается Зеемановским членом:

$$H_B = -\mu B S_z^d, \quad (60)$$

где S_z^d — спиновая матрица для спина $S = \frac{d-1}{2}$, d — размерность пространства кудита. В этом выражении введён эффективный магнитный момент:

$$\mu = \hbar S \frac{d\omega}{d\Phi}, \quad (61)$$

где S — площадь SQUID. Именно такой гамильтониан позволяет реализовать кудитный алгоритм оценки фазы, к рассмотрению которых мы и переходим.

1.3.2 Обоснование преимущества кудитных протоколов

В этой части будет приведено обоснование преимущества использования кудитов для квантовой метрологии. Приведенное обоснование является лишь иллюстративным, так как будут рассмотрены идеальные системы. Позже, однако, будет показано, что некоторые количественные предсказания данной модели являются общими и под-

тверждаются экспериментом даже в условиях значительного влияния факторов, не учитываемых данной моделью.

В стандартной кубитной метрологической процедуре используется последовательность из K измерений с различными временами накопления фазы, для определенности рассмотрим алгоритм Китаева, в котором $\tau_k = 2^k \tau_0$. Измеряемое поле представляется в виде бесконечной двоичной последовательности:

$$H = h_0 (t_0 \cdot 2^{-0} + t_1 \cdot 2^{-1} + \dots + t_{K-1} \cdot 2^{-(K-1)} + \dots), \quad t_k \in \{0,1\}. \quad (62)$$

Каждое измерение включает приготовление начального состояния, свободную эволюцию под действием внешнего магнитного поля и измерение в заданном базисе. В кубитном случае используется стандартная последовательность Рамси, которая позволяет на каждом шаге извлекать по одному биту бинарного представления измеряемого значения магнитного поля H . Таким образом, после K шагов можно определить значение H с точностью $\delta H \sim H_0/2^K$. Требуемое для этого общее когерентное время составляет:

$$T_{\text{qb}} = \tau_0 \sum_{k=0}^{K-1} 2^k = \tau_0 (2^K - 1) \approx \tau_0 2^K. \quad (63)$$

Это соответствует достижению предела Гейзенберга:

$$\delta H_{\text{qb}} = \frac{2\pi\hbar}{\mu T_{\text{qb}}}, \quad (64)$$

где μ — магнитный момент.

В кутритной схеме, основанной на использовании трёхуровневой квантовой системы, магнитное поле H представляется в троичной системе:

$$H = h_0 (t_0 \cdot 3^{-0} + t_1 \cdot 3^{-1} + \dots + t_{K-1} \cdot 3^{-(K-1)} + \dots), \quad t_k \in \{0,1,2\}. \quad (65)$$

В этом случае на каждом шаге алгоритм извлекает трит информации о внешнем магнитном поле, однако и время в этом случае изменяется по закону $\tau_k = 3^k \tau_0$. Вопросу выбора оптимального начального состояния и базиса считывания посвящена следующая часть, здесь мы рассмотрим иллюстративный пример. Тогда требуемое время для K шагов алгоритма:

$$T_{\text{qt}} = \tau_0 \sum_{k=0}^{K-1} 3^k = \tau_0 \cdot \frac{3^K - 1}{2} \approx \tau_0 \cdot \frac{3^K}{2}, \quad (66)$$

а точность измерения в этом случае зависит от времени измерения следующим образом:

$$\delta H_{\text{qt}} = \frac{\pi\hbar}{\mu T_{\text{qt}}}. \quad (67)$$

Таким образом, кутритный алгоритм также достигает предела Гейзенберга, но с

улучшенным в два раза префактором по сравнению с кубитным:

$$\delta H_{\text{qt}} = \frac{1}{2} \delta H_{\text{qb}}. \quad (68)$$

В случае размерности d из тех же соображений точность масштабируется как:

$$\delta H_{\text{qt}} = \frac{1}{d-1} \delta H_{\text{qb}}. \quad (69)$$

Для того, чтобы проверить эту гипотезу экспериментально, её нужно формализовать в несколько другом виде. Из рассмотрения видно, что за время измерения $T_{\text{qd}} \approx \tau_0 \cdot \frac{d^K}{d-1}$ извлекается $K \frac{\log d}{\log 2}$ бит информации. Извлечённую информацию можно определить как разность энтропии Шеннона апостериорного распределения магнитного поля до и после измерений. Видно, что, если рассмотреть зависимость такой разности энтропии от логарифма времени измерения, то при любом d получается прямая с наклоном 1 - Гейзенберговский предел, различие будет лишь в константе. Различие в ней связано с тем, что на первом шаге, время измерения на котором предполагается совпадающим для любой размерности d , извлекается $\frac{\log d}{\log 2}$ бит информации. В дальнейшем будет показано, что таким же образом, например, в случае реализации кубитного и кутритного алгоритмов Китаева выглядят различия в зависимости извлечённой информации от времени измерения и в реальном эксперименте.

Рассмотренное время измерения включало в себя только квантовую часть - время когерентной эволюции, однако управляющие импульсы, импульс считывания и необходимость ожидания релаксации кубита в основное состояние после каждого шага требуют времени. На практике эти времена сильно больше времени когерентной эволюции, и фактическое полное время измерения связано с числом шагов алгоритма, необходимых для достижения заданной точности. Основным преимуществом кутритного алгоритма является сокращение числа шагов K , необходимых для достижения заданной точности δH . Для достижения одной и той же точности в кутритной и кубитной схемах, отношение числа шагов:

$$\frac{K_{\text{qt}}}{K_{\text{qb}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63. \quad (70)$$

Этот факт также наблюдается в эксперименте.

Таким образом, кудитные измерительные протоколы позволяют достигать заданной точности существенно быстрее кубитных аналогов. Важно отметить, что при этом измерительный диапазон не уменьшается, а, наоборот, увеличивается при заданном времени управляющего импульса, чего нельзя сказать о подходе с использованием двух кубитов в максимально запутанном состоянии. Для того чтобы сохранить диапазон измерения, в этом случае требуется уменьшение длительности управляющего импульса в 2 раза, что технически невозможно, поскольку однокубитные операции быстрее двухкубитных.

1.3.3 Оптимизация метрологических протоколов для трансмона в кудитном режиме при измерении непрерывной переменной

Каждый шаг метрологической процедуры, основанной на алгоритме оценки фазы кудита, включает три стадии: подготовку, свободную эволюцию и считывание. На первом этапе кудит готовится в определённом квантовом состоянии, затем подвергается воздействию внешнего магнитного поля в течение времени t , после чего его состояние измеряется в выбранном базисе. Результат измерения используется для обновления апостериорного распределения для неизвестного магнитного поля с помощью формулы Байеса.

Формально начальное состояние, базис считывания и время экспозиции могут зависеть от номера шага в измерительном протоколе. Однако показано, что существуют оптимальные условия для выбора начального состояния кудита и базиса считывания. Используя оценку максимального ожидаемого прироста информации на каждом шаге, можно доказать, что для случая непрерывно распределённого измеряемого параметра оптимальное начальное состояние кудита соответствует состояниям с максимальной ортогональной проекцией спина [22] - состояниям, максимизирующим величину $\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2$. В дальнейшем мы будем называть эти состояния состояниями с максимальным модулем спиновой проекции на плоскость XY или просто ММСП-состояниями. Качественно это можно оправдать тем, что в эквивалентной картине мы извлекаем информацию об угле прецессии спина во внешнем магнитном поле. Угол прецессии связан с моментом сил, действующим на магнитный момент, который максимален, когда спин ориентирован перпендикулярно магнитному полю, которое предполагается ориентированным вдоль оси z. Это легко видно из выражения (60).

В отношении базиса считывания оптимальным является кудитный Фурье-базис. Это также можно обосновать качественно, поскольку в состояниях Фурье-базиса фаза является максимально определённой. На основе этих состояний в конечномерных Гильбертовых пространствах возможно даже построение эрмитового оператора фазы. На этом основана теория Пегга-Барнетта[23], а состояния Фурье являются собственными состояниями такого оператора.

На самом деле, выбор в качестве начального состояния состояния из базиса Фурье теоретически также приводит к Гейзенберговскому пределу, но с худшей константой в случае непрерывного измеряемого параметра. В случае существенно дискретного измеряемого параметра (не квазинепрерывного) именно начальное состояние из базиса Фурье оказывается оптимальным. В работе в случае кутрита были использованы оба варианта, как и ожидалось, ММСП-состояние показало лучшие результаты, поскольку измеряемое магнитное поле является непрерывной величиной.

В случае кубитов оптимальные начальные состояния совпадают с векторами кубитного Фурье-базиса, а необходимая последовательность импульсов реализуется в виде стандартной последовательности Рамси. Для кутритов ситуация иная: опти-

мальные начальные состояния имеют вид $\frac{1}{2}(e^{-i\beta}, \sqrt{2}, e^{i\beta})$, в то время как фурье-состояния имеют вид: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2})$. Использование такого квантового состояния оказывается выгодным с точки зрения прироста информации, поскольку отсутствуют дополнительные пики населённости уровней при фиксированных временных задержках в сравнении с начальным состоянием из базиса Фурье (см. Рис. 2).

Максимизация ожидаемого прироста информации осуществляется следующим образом. Рассмотрим апостериорное распределение на n -ом шаге:

$$P_n(\omega \mid \{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) = P_{n-1}(\omega \mid \{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^{n-1}) \cdot P(\xi_n \mid \omega, t_n, s_n) \cdot \mathcal{N}_n, \quad (71)$$

где ω - оцениваемый параметр, ξ_i - результат измерения на i -ом шаге, t_i - время свободной эволюции на i -ом шаге, переменная s_i кодирует начальное состояние и базис считывания на i -ом шаге, \mathcal{N}_n - нормировочный множитель. Введем энтропию Шеннона после n -ого шага алгоритма:

$$S_n(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) = - \int P_n(\omega' \mid \{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) \ln P_n(\omega' \mid \{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) d\omega' \quad (72)$$

Тогда естественно ввести величину, которая называется средний информационный выигрыш:

$$\begin{aligned} \langle \Delta I_{n+1}(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{\xi}_{n+1}, t, s\}) \rangle &= S_n(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) - \\ &- \langle S_{n+1}(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{\xi}_{n+1}, t, s\}) \rangle \end{aligned} \quad (73)$$

Эта величина отражает извлеченную информацию о неизвестном параметре на $(n+1)$ -ом шаге, поскольку она равна разности энтропий Шеннона до и после $n+1$ -ого шага алгоритма, усредненной по всем результатам измерений на $n+1$ -ом шаге. Естественно, что величина $S_{n+1}(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{\xi}_{n+1}, t, s\})$ рассчитывается как энтропия Шеннона для апостериорного распределения после обновления информации на $n+1$ -ом шаге при условии, что $\tilde{\xi}_{n+1}$ - результат измерения на $n+1$ -ом шаге:

$$\begin{aligned} \langle S_{n+1}(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{\xi}_{n+1}, t, s\}) \rangle &= \sum_{\tilde{\xi}_{n+1}=0}^{d-1} \int S_{n+1}(\{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{\xi}_{n+1}, t, s\}) \cdot \\ &\cdot P(\tilde{\xi}_{n+1} \mid \omega', t, s) \cdot P_n(\omega' \mid \{\xi_i, t_i, s_i\}_{i=1}^n) d\omega' \end{aligned} \quad (74)$$

Максимизируя результат, можно проводить оптимизацию протоколов, в частности, оптимизировать начальное состояние, базис считывания и время свободной эволюции.

Что касается оптимизации времени экспозиции на каждом шаге, существует несколько стратегий. Время воздействия может быть задано заранее до начала процедуры либо выбираться на основании результата предыдущего шага. Мы реализуем обе стратегии: алгоритмы Китаева и Фурье предполагают оптимизацию на каждом шаге, основанную на максимизации ожидаемого прироста информации, тогда как алгоритм ЛАМА использует заранее определённые линейно возрастающие времена экспозиции.

Основная цель нашего исследования - сравнить различные алгоритмы между собой. Однако сравнение эффективности метрологических алгоритмов не является тривиальной задачей. Для их сравнения используются несколько метрик: прирост информации, то есть суммарная извлечённая за время измерения энтропия Шеннона, и точность сенсора, определяемая как абсолютная разность между результатом измерения и истинным значением магнитного поля.

Очевидно, что эти метрики не эквивалентны. Например, результат измерения, соответствующий вероятностному распределению с множеством узких пиков, может демонстрировать высокий прирост информации, но быть бесполезным с точки зрения точности сенсора. Поэтому в нашем эксперименте основной целью является максимизация точности сенсора. Для устранения неоднозначностей в определении магнитного поля мы вносим небольшие модификации в алгоритмы.

Для всех рассмотренных алгоритмов каждый шаг начинается с некоторого начального вероятностного распределения, которое различается для разных алгоритмов. Затем новая информация о вероятностном распределении магнитного поля извлекается посредством байесовского обновления на основе результата одиночного измерения. На каждом шаге устанавливается пороговая вероятность и процент значений магнитного потока, подлежащих исключению. Алгоритм переходит к следующему шагу, когда суммарная вероятность потенциально исключаемых точек становится меньше пороговой. Теоретически вероятность ошибочного исключения для интервала, в котором находится истинное значение магнитного поля, строго определена и совпадает с пороговой вероятностью. Однако в реальных экспериментальных условиях эта вероятность содержит дополнительный вклад, обусловленный внутренними шумами сенсора.

Подробное описание каждого алгоритма приведено в главе, посвящённой оптимизации эксперимента.

1.3.4 Трансмон в кутритном режиме - реализация управляющих и считывающих метрологических последовательностей

Эта часть посвящена быстрой генерации ММСП-состояния и квантового преобразования Фурье с помощью одиночного многотонального импульса. Такая генерация позволяет уменьшить длительность управляющего и считывающего импульсов, что важно для увеличения измерительного диапазона сенсора.

Начнем с общего рассмотрения многотональной генерации управляющих импульса в случае кутрита-трансмона. В сверхпроводниковом трансмоне разрешенными являются переходы между соседними уровнями: 0-1, 1-2 и т.д. Связь трансмона со считывающим резонатором приводит к тому, что разрешенным становится двухфотонный переход 0-2, однако при генерации он практически не используется. Это связано с тем, что матричный элемент этого перехода сильно подавлен в сравнении с разрешенными переходами трансмона. Таким образом, управление переходом 0-2 требует

больших амплитуд импульса. Это приводит к существенным сдвигам резонансной частоты для разрешенных переходов, вызванным такими эффектами, как эффект Штарка в переменном поле и сдвиг Блоха-Зигерта, причем в случае наличия у импульса зависящей от времени огибающей, что всегда реализуется на практике, этот сдвиг изменяется во время импульса. Таким образом, в случае кутрита естественной представляется генерация ММСП-состояний и квантового преобразования Фурье с использованием двух разрешенных переходов, то есть сигнал является двухтональным. Рассмотрим гамильтониан, описывающий динамику трансмона под действием двухтональной классической накачки:

$$H(t) = \omega_{01} |1\rangle \langle 1| + (\omega_{01} + \omega_{12}) |2\rangle \langle 2| + [\Omega_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)](a + a^\dagger) \quad (75)$$

где взаимодействие с внешним электрическим полем рассматривается в дипольном приближении, (a, a^\dagger) — понижающий и повышающий операторы, определенные в Гильбертовом пространстве кутрита, $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ — огибающие возбуждающих тонов на частотах ω_1 и ω_2 , соответственно.

Чтобы описать динамику системы, перейдем во вращающуюся систему отсчета:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_d t} |\phi(t)\rangle, \quad \text{где} \quad H_d = \omega_1 |1\rangle \langle 1| + (\omega_1 + \omega_2) |2\rangle \langle 2|. \quad (76)$$

Подстановка в уравнение Шредингера приводит к выражению:

$$i \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = (e^{iH_d t} H(t) e^{-iH_d t} - H_d) |\phi(t)\rangle \equiv H_{\text{eff}}(t) |\phi(t)\rangle \quad (77)$$

Рассчитаем диагональные элементы эффективного гамильтониана в базисе $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \langle 0| H_{\text{eff}} |0\rangle &= 0 \\ \langle 1| H_{\text{eff}} |1\rangle &= \omega_{01} - \omega_1 \equiv \Delta_1 \\ \langle 2| H_{\text{eff}} |2\rangle &= \omega_{01} + \omega_{12} - \omega_1 - \omega_2 = \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned}$$

Рассчитаем недиагональные элементы эффективного гамильтониана: H_{eff} в базисе $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \langle 0| H_{\text{eff}}(t) |1\rangle &= \frac{\Omega_1(t)}{2} [e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-i(\omega_1 t + \varphi_1)}] e^{-i\omega_1 t} + \\ &+ \frac{\Omega_2(t)}{2} [e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} + e^{-i(\omega_2 t + \varphi_2)}] e^{-i\omega_1 t} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \langle 1| H_{\text{eff}}(t) |2\rangle &= \frac{\Omega_2(t)}{2} [e^{i\varphi_2} + e^{-2i\omega_2 t - i\varphi_2}] + \\ &+ \frac{\Omega_1(t)}{2} [e^{i(\omega_1 - \omega_2)t + i\varphi_1} + e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t - i\varphi_1}] \end{aligned} \quad (79)$$

Считая все члены, кроме постоянного, быстроосциллирующими, получим оконча-

тельное выражение для недиагональных элементов:

$$\langle 0 | H_{\text{eff}} | 1 \rangle = \frac{1}{2} \Omega_1(t) e^{i\varphi_1} \quad (80)$$

$$\langle 1 | H_{\text{eff}} | 2 \rangle = \frac{1}{2} \Omega_2(t) e^{i\varphi_2} \quad (81)$$

Таким образом, итоговый гамильтониан кутрита в RWA-приближении имеет вид:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{i\varphi_1} & 0 \\ \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{-i\varphi_1} & \Delta_1 & \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{i\varphi_2} \\ 0 & \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{-i\varphi_2} & \Delta_1 + \Delta_2 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Остальные члены быстро осциллируют и отбрасываются в RWA-приближении. Из условий применимости RWA приближения можно найти оценку на длительность импульса. В случае трансмона временной масштаб задается ангармонизмом:

$$\frac{\omega_{01} - \omega_{12}}{\Omega} \sim \frac{E_C * \tau_{\text{pulse}}}{\hbar} \gg 1. \quad (83)$$

Практически RWA приближение эффективно при соотношении хотя бы 10, для дальнейшего уменьшения длительности импульса необходимо использовать DRAG-техники или другие техники оптимизации огибающей. Именно из-за этого ограничения генерация с помощью одиночного импульса оказывается самой быстрой. В работе для управления кутритом использовались импульсы с Гауссовой огибающей длительностью 80 нс при ангармонизме в 250-300 МГц в зависимости от выбранного трансмона. Таким образом, условие (83) выполняется.

Перейдём к рассмотрению генерации необходимых для магнитометрии операций. Начнём с рассмотрения генерации состояния с максимальным модулем проекции спина на плоскость XY. Такое состояние, обозначаемое как ММСП, в общем случае имеет вид:

$$|\psi_{\text{ММСП}}\rangle = \frac{1}{2} (e^{-i\beta}, \sqrt{2}, e^{i\beta}) \quad (84)$$

Для генерации данного состояния используется одиночный импульс с двухтоновой резонансной накачкой на частотах ω_{01} и ω_{12} , соответствующих переходам $0 \leftrightarrow 1$ и $1 \leftrightarrow 2$. Подаваемый сигнал имеет вид:

$$V(t) = \frac{\Omega(t)}{\sqrt{2}} [\cos(\omega_{01}t) + \cos(\omega_{12}t)] \quad (85)$$

В приближении вращающейся волны (RWA) эффективный гамильтониан имеет структуру:

$$H_{\text{eff}} = \frac{\Omega(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (86)$$

то есть ситуация полностью аналогична поворотам в кубитном случае, поскольку

эта матрица пропорциональна матрице S_x в кутритном случае. То есть в кутритном случае можно выделить в группе $SU(3)$, описывающей произвольные кутритные преобразования, подгруппу, изоморфную $SU(2)$ с алгеброй, образованной S_x, S_y, S_z . В качестве частного случая ММСП-состояния можно взять собственное состояние матриц S_x или S_y с максимальной проекцией. Поскольку алгебра спинов описывает повороты вокруг осей, то для того, чтобы получить собственное состояние S_y из основного состояния, достаточно повернуть его вокруг оси x , что достигается за счёт эволюции под действием оператора Гамильтона, пропорционального S_x . Заметим, что такой подход применим для любой размерности гильбертова пространства кудита - единственное, что будет отличаться - необходимый угол поворота.

Поскольку накачка резонансная, уравнение Шредингера имеет решение, которое имеет вид:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{2}\hat{S}_x \int_0^t \Omega(t)dt\right) \quad (87)$$

В случае кутрита генерация ММСП состояния из основного происходит при условии:

$$\int_0^t \Omega(t)dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad (88)$$

его волновая функция в этом случае имеет вид:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \left(|0\rangle + \sqrt{2}i |1\rangle - |2\rangle \right) \quad (89)$$

Примечательным является тот факт, что данный импульс не нуждается в дополнительной калибровке, для его генерации достаточно иметь откалиброванные импульсы для переходов 0-1 и 1-2.

Рассмотрим теперь генерацию кутритного преобразования Фурье одиночным импульсом. Квантовое преобразование Фурье в трёхмерном гильбертовом пространстве имеет следующий вид:

$$U_{\text{QFT}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{8\pi i/3} \end{pmatrix}, \quad (90)$$

однако в дальнейшем станет ясно, что это выражение важно лишь с точностью до относительных фаз. То есть достаточно получить оператор вида:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \cdot U_{\text{QFT}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (91)$$

Для генерации кутритного импульса Фурье применяется двухтоновая нерезонансная накачка, возбуждающая переходы $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ и $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. При этом подаваемый сигнал

имеет следующий вид:

$$V(t) = \Omega_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \Omega_2(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (92)$$

где:

- $\omega_1 = \omega_{01} - \Delta$ — отстроенная частота первого тона,
- $\omega_2 = \omega_{12} + \Delta$ — отстроенная в противоположную сторону частота второго тона,
- $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ — огибающие первого и второго тонов,
- φ_1, φ_2 — начальные фазы первого и второго тонов.

После перехода во вращающуюся систему отсчёта и применения RWA гамильтониан принимает следующий вид:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{i\varphi_1} & 0 \\ \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{-i\varphi_1} & \Delta & \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{i\varphi_2} \\ 0 & \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{-i\varphi_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (93)$$

В рассмотренном случае уравнение Шредингера не имеет аналитического решения, оптимизация для заданной формы огибающей может быть проведена только численно. Из соображения симметрии ясно, что наиболее короткий импульс получается при одинаковой форме огибающих для обоих тонов. Для гауссовой огибающей условие для генерации кутритного импульса Фурье имеет вид:

$$\int_0^t \Omega(t) dt = 0.83 * \pi, \quad (94)$$

отстройка частоты Δ зависит от длительности импульса и является параметром калибровки. Калибровка импульса Фурье осуществляется минимизацией функции потерь, поскольку при $d = 3$ можно показать, что если оператор эволюции имеет одинаковые по модулю элементы, то он с точностью до относительных сдвигов фазы, описываемых умножением слева и справа на унитарную диагональную матрицу, реализует либо квантовое преобразование Фурье, либо обратное квантовое преобразование Фурье. Таким образом, функцию потерь можно выбрать в виде:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \left| |U_{ij}|^2 - \frac{1}{3} \right| \quad (95)$$

где U_{ij} — матричные элементы полученного оператора эволюции. Минимум функции потерь соответствует оператору, наиболее близкому к оператору из формулы (91). В ходе калибровки оптимизируются два параметра: отстройка частоты (в широком диапазоне) и интеграл от амплитуды огибающей (в узком диапазоне вблизи $0.83 * \pi$). Важным моментом является то, что начальные фазы управляющих тонов

не влияют на итоговые населённости, поскольку они могут быть компенсированы унитарным поворотом состояния. Таким образом, начальные фазы тонов приводят только к изменению относительных фаз получившихся состояний.

Поскольку при генерации Фурье-импульса используется нерезонансная накачка, полезно рассмотреть вопрос согласования фаз. Правильное согласование фаз необходимо по причине того, что эффективный гамильтониан (93) не обращается в нулевую матрицу при отсутствии генерации.

При изменении начальных фаз возбуждающих сигналов импульса Фурье на φ_1 и φ_2 , оператор эволюции может быть представлен в виде:

$$U = D^\dagger \cdot U \cdot D, \quad (96)$$

где U соответствует нулевым начальным фазам обоих тонов, а матрица D имеет вид:

$$D(\phi_1, \phi_2) = \text{diag}(1, e^{-i\phi_1}, e^{-i(\phi_1+\phi_2)}) \quad (97)$$

Отсюда видно, что существуют два независимых вращения: первое генерируется соотношением $\phi_1 = -\phi_2 = \phi_1^{cor}$ и совпадает с паразитным вращением, создаваемым эффективным гамильтонианом (93) в отсутствие накачки, а второе - соотношением $\phi_1 = \phi_2 = \phi_2^{cor}$, и такое вращение соответствует повороту под действием оператора S_z , описывающего, например, действие магнитного поля. Таким образом, компенсация паразитного вращения, вызванного нерезонансной накачкой, осуществляется выбором для последующих импульсов (здесь не важно, резонансным будет этот импульс или нет) $\phi_1^{cor} = \Delta * (t - t_0)$, где t_0 - время конца предыдущего импульса. Установка начальной фазы биений Рамси осуществляется выбором фазы ϕ_2^{cor} .

То есть в процессе калибровки импульса Фурье осуществляется независимая оптимизация паразитной относительной фазы и фазы биений Рамси путем подачи двух импульсов Фурье подряд с нулевой задержкой. Оптимизируются начальные фазы обоих тонов для второго импульса Фурье. При реализации последовательностей импульсов с задержкой к паразитной фазе добавляется слагаемое $\phi_1^{cor} = \Delta * (t - t_0)$.

1.3.5 Влияние ошибки считывания на эффективность протоколов оценки фазы

Single-shot измерения для кубитов в настоящее время являются стандартной процедурой. Используя стандартную пороговую классификацию для гауссовой аппроксимации пятен основного и возбужденного состояний, полученных с помощью изображения в комплексной плоскости синфазной (I) и квадратурной (Q) компонент преобразования Фурье однотонального считывающего импульса, в нашей работе была достигнута ошибка считывания состояний кубита примерно на уровне 13%.

Однако, определение состояния кутрита с помощью single-shot измерения — зада-

ча более трудная. Для определения состояния кутрита в эксперименте использовался двухтональный считывающий импульс. Для классификации состояний кутрита на основании I и Q Фурье-компонент для каждого из двух тонов была использована нейронная сеть (feedforward neural network, FNN) с двумя скрытыми слоями [24]. FNN была выбрана вместо других методов классификации, таких как, например, метод опорных векторов (SVM), благодаря её превосходной производительности при классификации нескольких состояний [25] и хорошей масштабируемости. Кроме того, FNN поддерживает transfer learning, что позволяет эффективно дообучать сеть при перекалибровке системы.

В нашем исследовании точность считывания как для кубита, так и для кутрита примерно одинакова и составляет $F \approx 87\%$, что является ключевым моментом для корректного сравнения кутритных и кубитных метрологических алгоритмов. На каждом шаге алгоритма количество single-shot считываний можно приблизительно оценить с помощью центральной предельной теоремы (ЦПТ). Для случая кубита, после последовательности Рамси, вероятность обнаружения кубита в возбужденном состоянии можно записать в виде:

$$P_e = \frac{1}{2}(1 + V * \cos(\phi)), \quad (98)$$

где V — видность интерференционной картины, определяемая как разница между минимальной и максимальной амплитудой вероятности для заданной временной задержки. Наблюдаемая видность зависит от точности измерения, поскольку низкая точность снижает контраст картины биений Рамси. Применяя формулу Бернулли для N независимых измерений на выбранном шаге и разлагая полученное биномиальное распределение в ряд вблизи максимума до второго порядка, получим нормальное распределение для внешнего магнитного поля со стандартным отклонением, пропорциональным $\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$. При фиксированной задержке измерение является классическим, и стандартное отклонение при достаточно больших N демонстрирует масштабирование $\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$. Условие перехода к следующему шагу записывается в виде:

$$g(\eta) = (1 - b), \quad (99)$$

где $\eta \propto \frac{1}{\sigma}$ — коэффициент, связанный с процентом исключаемых значений магнитного потока на данном шаге (при данной временной задержке), b — порог ошибки, а функция g имеет вид: $g = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} e^{-x^2} dx$

Это уравнение неявно задаёт пороговое значение σ_{int} , такое что при выполнении неравенства $\sigma < \sigma_{int}$ алгоритм переходит к следующему шагу. В результате нетрудно получить зависимость для числа single-shot считываний на шаге $N \propto \frac{1}{\sqrt{2}}$, что приводит к значительному увеличению времени измерений, необходимого для достижения того же уровня точности в случае низкой видности. Основная цель нашего исследования — сравнить эффективность алгоритмов оценки фазы, поэтому необходимо

исключить влияние ошибки измерения. Стоит отметить, что поскольку в реальном эксперименте для каждого шага центральная предельная теорема может и не выполняться в силу небольшого числа измерений, эффект проявляется ещё сильнее.

1.4 Учет влияния шумов

Эффективность каждого устройства ограничена его собственной стабильностью при воздействии внешних факторов. В контексте квантовой магнитометрии на трансмонах стабильность устройства тесно связана со стабильностью интерференционной картины. Экспериментально измеренные населенности уровней в зависимости от внешнего магнитного поля и времени свободной эволюции для конкретного трансмона будем называть его метрологическим паспортом. Метрологические паспорта, связанные с конкретным начальным состоянием, считывающим базисом и размерностью Гильбертова пространства, будем называть метрологическим паттерном.

Невозможно достичь заданной точности быстрее минимального характерного времени шума, амплитуда которого приблизительно равна этой точности, поэтому низкочастотный шум метрологического паспорта существенно ограничивает скорость сенсора. В рамках нашей процедуры время одиночного single-shot измерения τ_{meas} является ключевым параметром. Влияние шума на различных частотах ω_{noise} относительно этого масштаба принципиально различается и приводит к различным эффектам.

1.4.1 Высокочастотный шум - $\omega_{noise} \gg \frac{1}{\tau_{meas}}$

В идеальной системе без шума биения Рамси кудита не демонстрируют затухания. Однако в случае реальной системы наличие шума частоты трансмонов приводит к затуханию осцилляций, что в случае кубита проявляется в конечных временах когерентности T_2^* и $T_2^{1/f}$.

Первое время (T_2^*) соответствует влиянию белого шума, вызывающего экспоненциальное затухание осцилляций. Второе - ($T_2^{1/f}$) - отражает воздействие $1/f$ -шума, добавляющего гауссово затухание. Населённости уровней для кубита могут быть выражены как:

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2^*}} \cdot e^{-\frac{t^2}{(T_2^{1/f})^2}} \cos(\delta\omega \cdot t + \phi) \right), \quad (100)$$

где $\delta\omega$ — отстройка частоты управляющего сигнала, вызванная в нашем случае магнитным полем.

Для кутрита основное отличие заключается в наличии различных времён затухания T_2^* и $T_2^{1/f}$ для членов, дающих вклад в населённости уровней после метрологической последовательности и осциллирующих с частотой отстройки и удвоенной частотой отстройки. Однако общий эффект остаётся схожим: снижение контраста осцилляций.

Времена T_2^* и $T_2^{1/f}$ оказываются различными для разных паттернов. Теоретически типичное соотношение между временами дефазировки кубитного и кутритного паттернов $\frac{T_2^{qubit}}{T_2^{qutrit}} \sim 2$,

Важно понимать, что эти формулы описывают усреднённое по ансамблю поведение, так как получены усреднением идеальной картины по флуктуациям отстройки частоты $\delta\omega_{noise}$ в Гауссовом приближении. Поэтому данное описание справедливо только при $\omega_{noise} \gg \frac{1}{\tau_{meas}}$, что обеспечивает возможность усреднения по множеству периодов колебаний.

1.4.2 Шум с $\omega_{noise} \approx \frac{1}{\tau_{meas}}$

Шум на частотах $\omega_{noise} \approx \frac{1}{\tau_{step}}$ оказывает принципиально другое влияние на точность измерений. Когда переходная частота трансмонов чувствительна к такому шуму, это проявляется как нестабильность метрологического паспорта при выполнении шагов алгоритма. Если амплитуда шума частоты трансмонов приближается к диапазону измерений шага, вероятность ошибки резко возрастает.

Стратегии подавления такого шума включают адаптивные пороги для различных шагов: уменьшение пороговой вероятности для шага увеличивает время шага алгоритма τ_{step} . Это позволяет подавить стохастические отклонения потока за счёт самовыравнивания шума через усреднение по множеству циклов шума.

1.4.3 Низкочастотный шум - $\omega_{noise} \ll \frac{1}{\tau_{meas}}$

Данный тип шума вносит систематические погрешности измерений, которые могут быть уменьшены только увеличением времени измерений (или шага алгоритма) до масштаба характерного времени шума. Таким образом, такой шум представляет собой фундаментальное ограничение метрологических характеристик сенсора.

Для нашего сенсора это ограничение вносит доминирующий вклад. Этот вклад с хорошей точностью описывается Гауссовым шумом со стандартным отклонением приблизительно в 2–3 точки метрологического паспорта. Характерное время шума составляет порядка нескольких минут. Влияние низкочастотного шума будет обсуждаться при анализе результатов.

2 Описание эксперимента

Эта глава посвящена описанию основных аспектов эксперимента. Рассматривается экспериментальная установка, детально описываются реализованные алгоритмы оценки фазы и метрологические паттерны.

2.1 Описание экспериментальной установки и схемы измерений

2.1.1 Криостат растворения

Для исследований сверхпроводимости обычно требуются температуры порядка нескольких кельвин или ниже. Однако, для работы со сверхпроводящими кубитами температуры должны быть еще ниже - порядка 10 – 20 мК, это обусловлено необходимостью подавления тепловой заселенности возбужденных состояний искусственного атома, а именно условием $\hbar\omega \gg k_B T$, поскольку населенность уровней описывается при этих условиях статистикой Больцмана:

$$n_\omega \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (101)$$

Для достижения таких температур используются криостаты растворения, в нашем случае - BlueFors XLD1000 с базовой температурой $T = 10$ мК. Криостат состоит из вакуумной камеры с шестью термоизолированными фланцами, расположенными друг над другом. На каждом фланце поддерживается определенная температура:

- Комнатная температура (верхний фланец)
- 50 К
- 4 К
- 1 К (still)
- 100 мК (cold plate)
- 10 мК (mixing chamber)

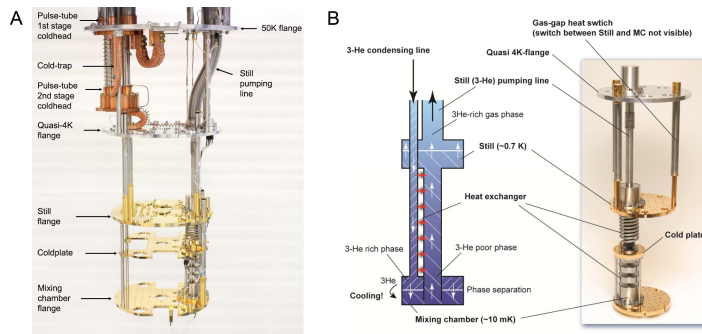


Рис. 1: Типовая структура криостата растворения (например, BlueFors XLD1000): фланцы с температурными ступенями от 50 К до 20 мК.

Вся конструкция окружена четырьмя тепловыми экранами, которые минимизируют нагрев за счёт теплового излучения с более нагретых температурных ступеней. Внешний экран герметичен и поддерживает вакуум внутри криостата. У данного

криостата два цикла охлаждения: первый поддерживает температуру на фланцах 50 К и 4 К, обеспечивая отвод тепла и создание условий для возможности конденсации смеси, второй обеспечивает охлаждение до низких температур путём поглощения тепла при растворении ^3He в ^4He . Мы кратко рассмотрим принцип работы обоих циклов и начнём рассмотрение с цикла предварительного охлаждения. В нём охлаждение осуществляется путём использования системы импульсных трубок - Pulse Tube.

В рефрижераторах растворения Pulse Tube двухступенчатый и состоит из двух последовательных ступеней охлаждения, каждая из которых реализует свой цикл, аналогичный циклу Стирлинга. Это необходимо, потому что температура, до которой возможно охлаждение ступени криостата, преимущественно определяется балансом мощности теплоотвода и мощности теплового излучения с других ступеней, поэтому в криостате много промежуточных ступеней, в частности, между комнатной ступенью и ступенью 4 К присутствует ступень на 50 К. Это позволяет поэтапно снижать температуру: первая ступень охлаждает до 50 К, вторая — до 4 К. В двухступенчатом Pulse Tube охлаждение осуществляется по единому замкнутому контуру циркуляции гелия, где каждая ступень работает между своими температурными уровнями: первая — между 300 К и 50 К, вторая — между 50 К и 4 К. Все этапы цикла происходят одновременно для обеих ступеней, а процессы повторяются для каждой пары горячей–холодный конец:

1. **Изотермическое сжатие на горячем конце** Компрессор сжимает гелий при высокой температуре (300 К для первой ступени, 50 К для второй ступени), увеличивая давление газа. При этом газ отдаёт тепло на соответствующий экран криостата.
2. **Изохорное охлаждение через регенератор.** Сжатый газ проходит через регенератор, где его объём остаётся постоянным, но температура понижается за счёт теплообмена с металлической матрицей регенератора. Газ охлаждается до температуры холодного конца ступени (50 К или 4 К).
3. **Изотермическое расширение на холодном конце** Газ поступает на холодный конец Pulse Tube, где расширяется при постоянной температуре, поглощая тепло с холодного конца и обеспечивая охлаждение соответствующей ступени.
4. **Изохорный нагрев - обратный ход через регенератор.** Газ возвращается через регенератор к горячему концу. Его объём остаётся постоянным, но температура повышается за счёт поглощения тепла из матрицы регенератора. Для эффективного переноса энергии используется фазовый сдвиг $\frac{\pi}{2}$ между давлением и потоком газа, реализуемый с помощью импедансных трубок или буферных резервуаров.

Таким образом, двухступенчатый Pulse Tube реализует последовательность: изотермическое сжатие — изохорное охлаждение — изотермическое расширение — изохор-

ный нагрев, обеспечивая поэтапное, но одновременное охлаждение до 4 К в едином замкнутом контуре. В отличие от классического цикла Стирлинга, в Pulse Tube отсутствуют движущиеся части на холодной стороне, что снижает вибрации и повышает надёжность работы криостата.

Для охлаждения до более низких температур используется смесь $^3\text{He}/^4\text{He}$. Для начала необходимо достигнуть конденсации ^4He и температуры ~ 1 К, это делается следующим образом:

1. Смесь гелиевых изотопов (^3He и ^4He) изначально хранится в баллоне при комнатной температуре и давлении в газообразном состоянии.
2. При запуске процесса конденсации смесь последовательно охлаждается в теплообменниках: сначала до ~ 4 К, эта температура поддерживается pulse-tube.
3. Далее смесь поступает в 1 К pot — резервуар с жидким ^4He , сконденсированным при ~ 4.2 К и давлении, близком к давлению в сосуде.
4. Вакуумный насос (турбомолекулярный или скролл) откачивает пары гелия из 1 К pot, снижая давление над жидкостью и вызывая испарение ^4He при температуре вплоть до температуры кипения ^4He при пониженном давлении - ~ 1 К.
5. Испарение ^4He обеспечивает испарительное охлаждение системы до ~ 1 К.
6. Охлаждённая смесь далее поступает в still-плату и mixing chamber для дальнейшего охлаждения до миллиКельвинных температур.

Дальнейшее охлаждение до 10 мК достигается за счёт циркуляции и фазового разделения смеси изотопов $^3\text{He}/^4\text{He}$. Смесь изотопов гелия-3 (^3He) и гелия-4 (^4He) в определённом диапазоне значений относительной концентрации при температуре ниже примерно 0,8 К разделяется на две фазы:

- **Обогащённая гелием-3 фаза** — содержит высокую концентрацию ^3He .
- **Обеднённая гелием-3 фаза** — содержит низкую концентрацию ^3He , в основном ^4He .

Из-за разницы плотностей фаз, обусловленной массой изотопов, обеднённая фаза имеет большую плотность и, следовательно, располагается ниже под действием гравитации, тогда как обогащённая ^3He фаза находится выше. Охлаждение происходит следующим образом:

1. Испарение на still-плате (~ 1 К):

- На still-плате происходит испарение жидкого ^3He , так как давление насыщенных паров ^3He значительно выше, чем у ^4He .
- Для поддержания постоянной циркуляции ^3He используется догрев пластины.

- Пары ^3He откачиваются турбомолекулярным насосом, что обеспечивает охлаждение пластины за счёт испарения.

2. Охлаждение ^3He через рекуперативный теплообменник:

- Жидкий ^3He , возвращаясь к mixing chamber, проходит через теплообменник.
- Проходя через него, он охлаждается за счёт контакта с холодной разбавленной фазой.

3. Осмос в mixing chamber (~ 10 мК):

- В mixing chamber происходит фазовое разделение смеси $^3\text{He}/^4\text{He}$ на концентрированную (богатую ^3He) и разбавленную (с низкой концентрацией ^3He) фазы.
- Атомы ^3He переходят из концентрированной фазы в разбавленную через границу раздела, поглощая тепло из-за разности энтальпий между фазами.
- Этот осмотический переход обеспечивает охлаждение mixing chamber и прилегающих образцов до милликельвинных температур.

Таким образом, охлаждение достигается за счёт испарения ^3He на still-плате и осмотического перехода ^3He в mixing chamber, что обеспечивает эффективный теплоотвод до температур порядка 10 мК.

2.1.2 Схема генерации управляющих и считывающих импульсов с использованием модуляции и демодуляции на I-Q миксере

Для управления состоянием кубита на частотах порядка нескольких ГГц используется схема на основе квадратурной модуляции сигнала (IQ-модуляции), где форма и фаза сигнала задаются генератором произвольных форм (AWG), а модуляция осуществляется с помощью квадратурного смесителя (рис. 2).

Принцип работы схемы с IQ-модуляцией заключается в следующем. Пусть квадратурные сигналы заданы как:

$$\begin{cases} I(t) = A(t) \cos(\omega_{\text{IF}}t + \varphi), \\ Q(t) = A(t) \sin(\omega_{\text{IF}}t + \varphi), \end{cases} \quad (102)$$

где $A(t)$ — амплитуда, ω_{IF} — угловая частота промежуточной частоты, φ — постоянная фаза. IQ-миксер формирует выходной сигнал:

$$s(t) = I(t) \cos(\omega_c t) - Q(t) \sin(\omega_c t). \quad (103)$$

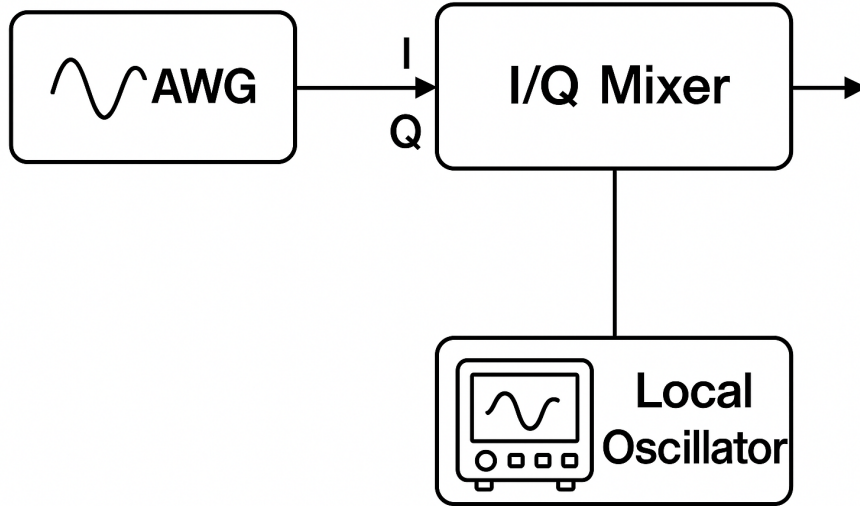


Рис. 2: Принципиальная схема генерации СВЧ-импульсов с использованием IQ-смесителя.

Преобразуя, получаем:

$$\begin{aligned} s(t) &= A(t) \cos(\omega_{\text{IF}}t + \varphi) \cos(\omega_c t) - A(t) \sin(\omega_{\text{IF}}t + \varphi) \sin(\omega_c t) \\ &= A(t) \cos(\omega_c t + \omega_{\text{IF}}t + \varphi). \end{aligned} \quad (104)$$

Таким образом, выходной сигнал имеет вид:

$$s(t) = A(t) \cos((\omega_c + \omega_{\text{IF}})t + \varphi), \quad (105)$$

то есть несущая частота сдвигается на промежуточную частоту ω_{IF} с фазовым сдвигом φ .

Поскольку элементы схемы неидеальны, на выходе смесителя возникают нежелательные гармоники и сигнал на опорной частоте. Чтобы подавить нежелательные компоненты спектра (на частотах ω_{LO} , $(\omega_{\text{LO}} - \omega_{\text{IF}})$), I и Q сигналы подбираются так, чтобы компоненты с ненужными фазами взаимно уничтожались. После формирования сигнал проходит через каскад аттенюаторов на каждом температурном фланце криостата. Это необходимо для:

1. уменьшения уровня сигнала, доходящего до трансмонов.
2. подавления теплового шума;
3. ослабления паразитных отражений;

Рассмотренный способ позволяет одновременно реализовывать как амплитудную, так и частотную модуляцию. Формируемые таким образом импульсы управляют переходами между уровнями трансмона, позволяя реализовывать одно- и двухкубитные операции; также подобный способ модуляции применяется при генерации

считывающего импульса. Демодуляция сигнала происходит также с использованием IQ-миксера, осуществляется обратное преобразование.

2.1.3 Дизайн образца

Схема состоит из девяти трансмонов с различными параметрами. Каждый трансмон представляет собой систему, включающую конденсатор и СКВИД (см. рис. 3), обеспечивающую чувствительность к магнитному потоку. Каждый трансмон связан

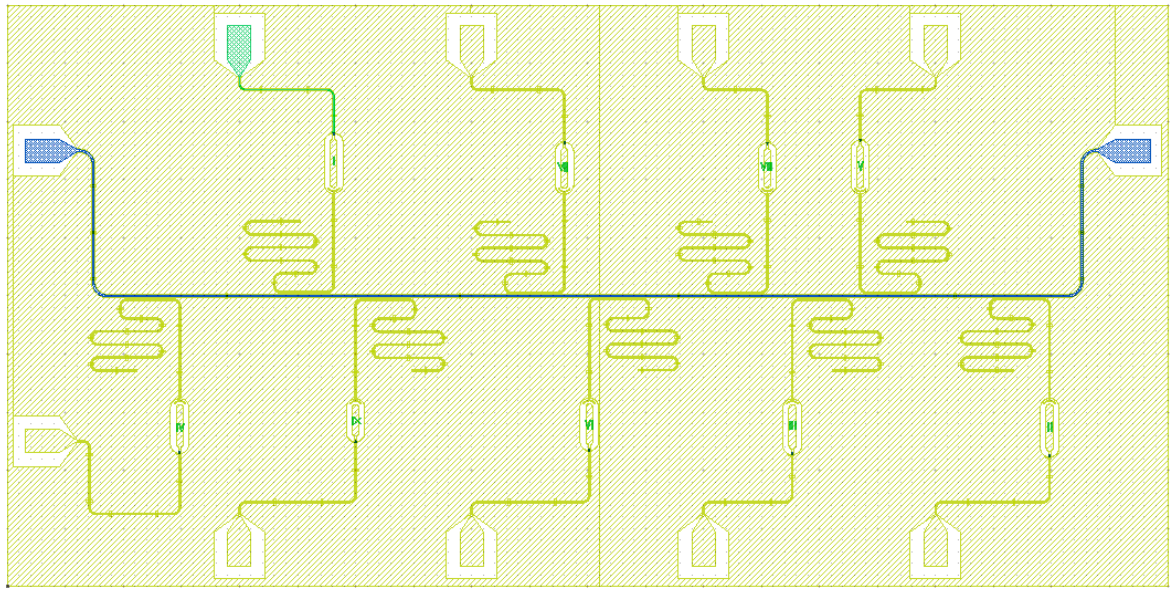


Рис. 3: Схематическое изображение исследуемой квантовой схемы, состоящей из девяти трансмонов, индивидуальных четвертьволновых компланарных резонаторов, общей линии считывания и DC-линий управления. Металлизация выполнена из алюминия на высокоомной кремниевой подложке.

с четвертьволновым копланарным резонатором (CPW, coplanar waveguide), который, в свою очередь, емкостно соединён с общей линией передачи. Такая конфигурация позволяет как неразрушающим образом считывать квантовое состояние, так и осуществлять управление состоянием кутрита. Дополнительно к каждому трансмону подведена индивидуальная линия смещения постоянного тока (DC-линия), обеспечивающая точный контроль магнитного потока, проходящего через СКВИД, и, следовательно, управление частотой перехода.

Генерация управляющих и считывающих импульсов реализуется с использованием классической схемы преобразования вверх/вниз частоты на основе IQ-смесителей. Для метрологических измерений нами был выбран кутрит с оптимальными параметрами (см. табл. 1).

Частота трансмона $\omega_{01}(\Phi)$ зависит от магнитного потока Φ , пронизывающего СКВИД, следующим образом:

$$\omega_{01}(\Phi) = \sqrt{8E_C E_J(\Phi)} - E_C \quad (106)$$

Таблица 1: Параметры трансмонов

Δ , МГц	ω_{01} , ГГц	T_1 , μs	T_2^* , μs	T_{1fe} , μs	T_{2fe}^* , μs
0^1	5.8946	29	17	10	10
15^2	5.8796	30	2.9	10	3

где E_C — энергия заряда, а $E_J(\Phi)$ — зависящая от потока джозефсоновская энергия. Для симметричных джозефсоновских переходов:

$$E_J(\Phi) = E_{J\Sigma} \left| \cos \left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \quad (107)$$

где $E_{J\Sigma}$ — сумма энергий джозефсоновских переходов, а Φ_0 — квант магнитного потока. Чувствительность устройства к потоку определяется выражением:

$$\mu = \frac{\partial\omega_{01}(\Phi)}{\partial\Phi} \quad (108)$$

В предыдущих исследованиях[26] трансмоны использовались в рабочих точках, значительно отстоящих от «sweet spot», поскольку у трансмонов наблюдалось короткое время T_2^* в «sweet spot» — примерно 500 нс, что требовало большого магнитного момента для достижения высокой точности. В отличие от этого, наши трансмоны демонстрируют существенно улучшенное время T_2^* в «sweet spot», составляющее от 10 до 20 микросекунд. Следовательно, оптимальная рабочая точка расположена ближе к «sweet spot», что даёт несколько заметных преимуществ.

Во-первых, расширяется рабочий диапазон сенсора без существенного ухудшения точности. Кроме того, повышается стабильность параметров метрологического паттерна трансмона за счёт снижения внешних шумов, которые могут вызываться внешними магнитными полями и магнитными примесями. Поэтому мы выбрали рабочую точку при внешнем потоке $\Phi_{op} \approx 0.066\Phi_0$ с наклоном $\frac{d\nu}{d\Phi}|_{\Phi = \Phi_{op}} \approx 0.5 \frac{\text{GHz}}{\Phi_0}$, что соответствует эффективному магнитному моменту $\mu \approx 869\mu_B$ и теоретической чувствительности в режиме кубита $\delta\Phi_{\text{theor}} = \left| \frac{d\omega(\Phi)}{d\Phi} \right|^{-1} \cdot \frac{1}{T_2^* \sqrt{t/T_{\text{rep}}}}$.

Для рабочей точки с $T_2^* \approx 3 \times 10^{-6}$ с мы получаем $\delta\Phi_{\text{theor}} \approx 9.5 \times 10^{-6} \frac{\Phi_0}{\sqrt{t}}$, где T_{rep} — длительность одного single-shot измерения, включающее время релаксации трансмона в основное состояние.

В эксперименте время одного single-shot измерения оказывается равным $T_{\text{rep}} \approx 2 \times 10^{-4}$ с. Основным ограничением является отсутствие интеграции протокола быстрого сброса трансмона в текущем дизайне. Реализация этой техники позволила бы сократить T_{rep} более чем на два порядка величины, что обеспечило бы пропорциональное улучшение метрологической точности сенсора примерно на порядок.

турных ступенях криостата. Общая схема подключения образца представлена на (рис. 4).

2.2 Экспериментальные метрологические паттерны

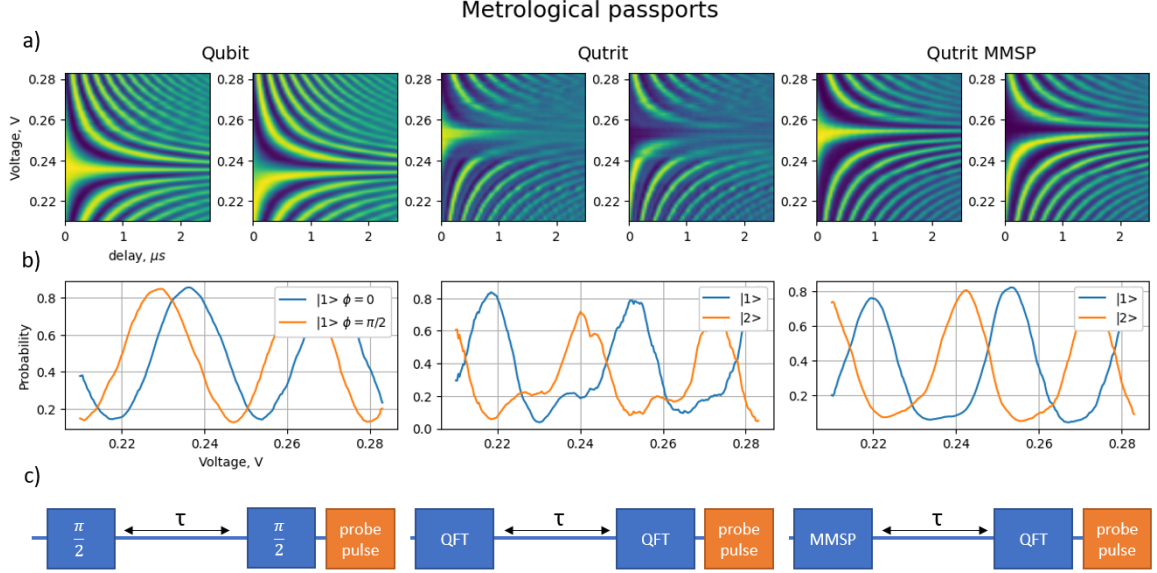


Рис. 5: На рисунке показаны метрологические паспорта для кубита и кутрита. **а)** Метрологические паспорта - зависимости населенности состояния от времени задержки (τ) и внешнего магнитного поля (напряжения V). Для кубита представлены два паспорта для картины Рамси со сдвинутыми на $\frac{\pi}{2}$ фазами второго импульса, что позволяет определять магнитные поля в симметричном диапазоне относительно рабочей точки. Для кутрита показаны населенности состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$. **б)** Срезы при нулевой задержке ($\tau = 0$). **в)** Последовательности импульсов. Для кубита используется классическая последовательность Рамси (импульсы $\pi/2$ с задержкой τ). Для кутрита применяется импульс квантового преобразования Фурье (QFT) в сочетании с импульсом генерации ММСР-состояния.

Для обеспечения возможности измерения магнитного потока с использованием алгоритмов оценки фазы первоначально проводятся измерения интерференционных паттернов во всем измерительном диапазоне магнитного поля. Эти измерения позволяют эмпирически установить индивидуальную для устройства зависимость между магнитным потоком Φ и накапливаемой квантовой фазой, с учётом сопутствующих эффектов, таких как изменение резонансной частоты считывающего резонатора вследствие нелинейной динамики взаимодействия «кубит–резонатор» и деградация управляющих импульсов при смещении рабочей частоты трансмона, а также влияние примесных уровней, шумовых воздействий и других факторов. Таким образом, экспериментально определяются населённости базисных состояний, которая в дальнейшем с помощью Байесовского подхода по результатам измерений будет преобразована в апостериорное распределение для магнитного потока (магнитного поля).

Каждый паспорт (рис. (см. рис. 5)) формируется на основе одного и того же набора из 251 значения магнитного потока: $\Phi_i = (i - 1 - 125) \cdot \delta\Phi_{\text{step}} + \Phi_1$, где $i = 1, \dots, 251$,

$\Phi_1 = 0,066\Phi_0$, а шаг по потоку составляет $\delta\Phi_{\text{step}} = 6 \times 10^{-5}\Phi_0$. Это соответствует рабочему диапазону сенсора порядка $0,015\Phi_0$. Также задаётся 62 значения времени: $t_i = (i - 1) \cdot t_{\text{step}}$, где $i = 1, \dots, 62$, а $t_{\text{step}} = 40$ нс. Для обеспечения достаточного соотношения сигнал/шум измерение населенностей уровней для каждой точки паспорта проводится по 10,000 single-shot измерений. Дополнительно к паспорту применяется скользящее среднее по магнитному полю для каждой : для кутритного паспорта с начальным состоянием из базиса Фурье используется окно, включающее восемь дополнительных точек симметрично относительно текущей, а для остальных метрологических паттернов — шесть. Для крайних точек размер окна усреднения уменьшается с сохранением симметрии. Оптимизация параметров сглаживания и способа фильтрации в рамках настоящего исследования приоритетом не является, поскольку её влияние на общую эффективность предложенного алгоритмического подхода оценивается как несущественное.

Корректное сравнение эффективности кубитных и кутритных алгоритмов возможно лишь при совпадении диапазона изменения магнитного потока и рабочей точки сенсора. Это достигается путём соответствующей настройки длительности подготовительных и считывающих импульсов. Диапазон измерений определяется минимальной задержкой колебаний Рамси, вносимой управляющими импульсами из-за влияния магнитного поля, поскольку невозможно выключать измеряемое магнитное поле на столь короткое время из-за переходных процессов. В результате измерительный диапазон $\Delta\phi \propto \frac{1}{\tau_0}$, где τ_0 - минимальная задержка, связанная с длительностью управляющего импульса. Она извлекается с помощью фита каждой интерференционной картины при фиксированном магнитном поле общей функцией с добавлением некоторой фазы. Фаза предполагается линейно зависящей от Зеемановского сдвига частоты, коэффициент пропорциональности и есть τ_0 .

Минимальные задержки для различных паттернов - кубитного, кутритного с начальным состоянием Фурье и кутритного с оптимизированным начальным состоянием с максимальным модулем спиновой проекции на плоскость XY составляют соответственно: (64 ± 2) нс, (75 ± 3) нс и (80 ± 2) нс. Длительность управляющих импульсов составляла 59 нс для кубитных паттернов и 80 нс - для кутритных. Все приведённые в работе погрешности указаны для доверительного интервала 0,95.

2.2.1 Использование двух паттернов, сдвинутых по фазе, для кубитного режима

Следует отметить, что кутритные протоколы демонстрируют наилучшие метрологические характеристики при симметричном диапазоне магнитного потока, центрированном относительно рабочей точки. Выход за пределы этой симметричной области приводит к ухудшению видимости паспортов. Для адаптации кубитных протоколов к такому же симметричному диапазону необходимо использование двух паспортов со взаимным фазовым сдвигом между управляющими $\pi/2$ -импульсами на угол $\phi = \pi/2$,

что позволяет устранить неоднозначность при интерпретации фаз в симметричных интервалах магнитного потока относительно единственного паттерна. Теоретически, можно использовать такой метод и в кутритном случае - использовать три паспорта со сдвигом на угол $\phi = \pi/3$, однако моделирование и эксперимент показывают, что в этом нет необходимости.

Во всех последующих методиках выбора оптимального времени свободной эволюции для алгоритмов Китаева и полуклассического преобразования Фурье используется, в случае кубитной реализации, два паспортных измерения с фазовым сдвигом, из которых для каждого шага алгоритма выбирается наиболее информативное. Это позволяет осуществить совместную оптимизацию как по времени свободной эволюции, так и по фазе последовательности Рамси. В отличие от этого, алгоритм LAMA, не предполагающий параметрической оптимизации в процессе его работы, реализует итеративное чередование между двумя паспортами на каждом шаге алгоритма.

2.2.2 Байесовский подход

Применение Байесовского подхода заключается в последовательном обновлении распределения вероятности $P(\Phi)$, отражающего нашу уверенность относительно значения магнитного потока. Каждое новое измерение предоставляет дополнительную информацию, которая уточняет это распределение. Учитывая дискретный характер паспортов (251 значение магнитного потока Φ_i , $i = 1, \dots, 251$), Байесовский алгоритм включает следующие этапы:

1. **Инициализация:** Начинаем с распределения потока $P_0(\Phi)$, которое может быть равномерным:

$$P_0(\Phi_i) = \frac{1}{N_\Phi}, \quad N_\Phi = 251, \quad (109)$$

либо основано на предварительной информации о системе.

2. **Однократное измерение:** Проводится одиночное измерение с использованием одного из метрологических паттернов: кубитного, кутритного Фурье или кутритного ММСП. В результате, на шаге n , наблюдается состояние $|j_n\rangle \in \{0,1,2\}$ для кутрита или $|j_n\rangle \in \{0,1\}$ для кубита с вероятностями $P(j_n|\Phi_i)$, полученными из соответствующих паспортов.
3. **Обновление апостериорного распределения:** Для каждой точки Φ_i пересчитывается вероятность:

$$P_{n+1}(\Phi_i) = \frac{P(j_n|\Phi_i)P_n(\Phi_i)}{\sum_{k=1}^{N_\Phi} P(j_n|\Phi_k)P_n(\Phi_k)}, \quad (110)$$

где $P(j_n|\Phi_i)$ — вероятность наблюдения состояния $|j\rangle$ согласно данным из метрологического паспорта сенсора при значении потока Φ_i , $P_n(\Phi)$ — распределе-

ние после n измерений, а $P_{n+1}(\Phi)$ — обновлённое распределение после $(n+1)$ -го измерения.

2.3 Модифицированные алгоритмы оценки фазы

Мы переходим к описанию модифицированных алгоритмов оценки фазы, которые были реализованы в эксперименте. Модификации производились с целью устранения возможных неоднозначностей и снижения вероятности ошибки. Перейдём к рассмотрению конкретных алгоритмов.

2.3.1 Классический алгоритм

Классический метрологический алгоритм выполняет predetermined число оди-
ночных измерений N либо продолжается до достижения кумулятивной вероятности
для заданного числа точек магнитного потока n выше установленного порогового
значения при минимально возможном времени свободной эволюции τ_0 . Алгоритм
включает следующие этапы:

1. Извлечение информации о магнитном потоке

- Алгоритм стартует с равномерного распределения вероятности $P(\varphi)$ по всем возможным значениям фазы.
- Выполняется одиночное измерение с использованием соответствующей последовательности с временем свободной эволюции τ_0 . Происходит обновление распределения вероятности $P(\varphi)$ по формуле Байеса. Эта последовательность действий повторяется N раз или до выполнения критерия сходимости.

2. Оценка фазы (одинаковая для всех алгоритмов)

Значение потока можно оценить следующим образом:

$$\varphi_{\text{est}} = \arg \max P(\varphi)$$

В дальнейших алгоритмах используется эта оценка, однако для краткости упоминание об этом опущено.

2.3.2 Алгоритм Китаева

Метрологический алгоритм Китаева начинается с минимально возможного времени свободной эволюции τ_0 . На каждом шаге устанавливается порог по вероятности, при этом после каждого шага остаётся только $\frac{1}{d}$ значений магнитного потока, где d — размерность гильбертова пространства кудита. Шаги алгоритма:

1. Извлечение информации о магнитном потоке

- Алгоритм стартует с равномерного распределения вероятности $P(\varphi)$.
- Выполняется одиночное измерение с временем свободной эволюции τ_k . Происходит обновление распределения вероятности $P(\varphi)$ по формуле Байеса. Эта последовательность действий повторяется до тех пор, пока кумулятивная вероятность $\frac{d-1}{d}$ наименьших по вероятности значений магнитного потока не станет ниже установленного порога.
- На оставшемся множестве точек потока (доля $\frac{1}{d}$) снова задаётся равномерное распределение вероятности.

2. Выбор следующего времени свободной эволюции

- Вычисляется средний ожидаемый прирост информации для всех $\tau > \tau_k$ по формуле:

$$G(\tau) = \sum_{k=0}^{d-1} (S(P(\varphi)) - S(P(\varphi|\tau, j_k))) \cdot P(j_k|\tau). \quad (111)$$

При этом:

$$P(j_k|\tau) = \sum_i P(j_k|\tau, \varphi_i) \cdot P(\varphi_i) \quad (112)$$

где $S(P)$ — энтропия Шеннона, $P(\varphi_i|\tau, j_k)$ — обновлённое байесовское распределение.

- В качестве следующего времени свободной эволюции выбирается τ_{k+1} , максимизирующее величину $G(\tau)$:

$$\tau_{k+1} = \arg \max_{\tau} G(\tau) \quad (113)$$

2.3.3 Алгоритм полуклассического преобразования Фурье

Алгоритм полуклассического преобразования Фурье начинается с большого времени свободной эволюции. На каждом шаге устанавливается порог по вероятности. На первом шаге определяются всевозможные варианты истинных значений магнитного потока. Распределение после первого шага состоит из узких пиков. Определение нужного пика происходит на последующих шагах, причем на каждом шаге исключается $\lfloor \frac{d-1}{d}n \rfloor$ пиков, где n - изначальное число пиков на данном шаге, а d - размерность Гильбертова пространства кудита. Шаги алгоритма:

1. Первый шаг

- Алгоритм стартует с равномерного $P(\varphi)$.
- Выполняется одиночное измерение с временем свободной эволюции τ . Обновить $P(\varphi)$. Эта последовательность действий повторяется до тех пор, пока кумулятивная вероятность обнаружения магнитного потока вне окрестностей пиков не станет ниже установленного порога.

- Для проверки условия сходимости нужно выполняются следующие действия:

- Определяются локальные максимумы.
- Рассчитывается суммарная вероятность обнаружения магнитного потока вне окрестностей пиков шириной $\frac{N}{dn}$, где N - общее число значений магнитного потока в паспорте, а n - число обнаруженных максимумов.

Если кумулятивная вероятность обнаружения магнитного потока вне окрестностей пиков ниже установленного порога, алгоритм переходит на следующий шаг, вероятность обнаружения потока вне окрестности пиков кладется равной нулю, оставшимся пикам присваивается равномерное распределение, общее распределение по магнитному потоку перенормируется.

2. Исключение побочных пиков

- Выполняется одиночное измерение с временем свободной эволюции τ_k .
- Измерения производятся до тех пор, пока кумулятивная вероятность наименее вероятных $[n \cdot \frac{d-1}{d}]$ пиков не окажется меньше заданного порога.
- Оставшимся пикам присваивается равномерное распределение.

3. Выбор следующего времени свободной эволюции

- Распределение разбивается на блоки по d соседних пиков.
- Вероятности вне блока обнуляются, распределение перенормируется.
- Вычисляется средний ожидаемый прирост информации для всех $\tau < \tau_k$ по формуле:

$$G(\tau) = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_u (S(P_u(\varphi)) - S(P_u(\varphi|\tau, j_k))) \cdot P(j_k|\tau), \quad (114)$$

где суммирование по u обозначает суммирование по всем блокам из d соседних пиков. При этом:

$$P(j_k|\tau) = \sum_i P(j_k|\tau, \varphi_i) \cdot P(\varphi_i) \quad (115)$$

- В качестве следующего времени свободной эволюции выбирается τ_{k+1} , максимизирующее величину $G(\tau)$:

$$\tau_{k+1} = \arg \max_{\tau} G(\tau) \quad (116)$$

2.3.4 Линейный восходящий алгоритм - LAMA

Линейно возрастающий метрологический алгоритм (LAMA) представляет собой итеративную схему фазовой оценки, начинающуюся с минимально допустимого времени

свободной эволюции τ_0 и использующую линейно увеличивающиеся задержки с фиксированным шагом t_{step} . На каждом шаге из вероятностного распределения исключается определённая доля точек с наименьшей вероятностью. Параметром алгоритма является доля исключаемых точек η .

Оптимальное значение η связано с шагом по времени задержки t_{step} и подбирается таким образом, чтобы предотвратить появление дополнительных ложных максимумов в распределении вероятности на следующих шагах. Приближённая оценка этого параметра может быть записана как:

$$\eta = 1 - \frac{\tau_0}{\tau_0 + t_{\text{step}}},$$

где τ_0 — минимальное значение задержки.

Каждый шаг алгоритма LAMA состоит из следующих этапов:

1. Извлечение информации о магнитном потоке

- На начальном шаге задаётся равномерное распределение вероятности $P(\varphi)$ по всем возможным значениям фазы.
- На шаге k выполняется одиночное измерение с задержкой $\tau_k = \tau_0 + k \cdot t_{\text{step}}$.
- После измерения распределение $P(\varphi)$ обновляется согласно формуле Байеса.
- Эта последовательность действий повторяется до тех пор, пока кумулятивная вероятность η точек с наименьшими значениями $P(\varphi_i)$ не станет меньше заданного порога, после чего соответствующие точки исключаются, а оставшееся распределение нормируется.

Алгоритм LAMA, в отличие от алгоритмов Китаева и полуклассического преобразования Фурье, не требует оптимизации в процессе своей работы, а также он не требует явного переопределения распределения вероятности после каждого шага. В схемах Китаева и Фурье каждый шаг подразумевает выполнение сравнительно большого числа одиночных измерений. Это обусловлено как экспоненциальным ростом времени свободной эволюции τ , так и снижением контрастности метрологического паспорта из-за влияния высокочастотных шумов. В результате таких шагов вероятностное распределение резко сужается и формирует чёткий пик. Однако положение максимума этого пика носит стохастический характер, что приводит к необходимости выравнивать начальное распределение перед следующим шагом, поскольку продвинуть узкий пик Байесовским обновлением дольше, чем сузить равномерное распределение.

В алгоритме LAMA на каждом шаге выполняется лишь малое количество одиночных измерений. Это предотвращает преждевременное сужение вероятностного

распределения и позволяет эффективно переносить его на следующие шаги без необходимости его переравнивания. Таким образом, достигается баланс между информативностью и устойчивостью алгоритма, а также ускоряется работа сенсора за счет использования метрологического паспорта в зоне большей контрастности интерференционной картины.

3 Анализ полученных результатов

Эта глава посвящена анализу обсуждению и анализу полученных результатов. В работе есть две основные цели: во-первых, сравнить кутритные метрологические алгоритмы оценки фазы с их кубитными аналогами, и во-вторых, сравнить различные алгоритмы оценки фазы между собой. Что касается сравнения кубитов и кутритов, мы сосредотачиваемся на таких показателях, как извлечённый прирост информации и точность сенсора. В частности, для анализа контрастности метрологических паттернов (кубитного, кутритного с Фурье-состоянием, кутритного с ММСП состоянием) рассчитывается средняя извлечённая измерением информация $\langle S(P_i) - S(P_f) \rangle$, представляющая собой выборочное среднее разности энтропии Шеннона между начальным распределением вероятности магнитного потока $S(P_i)$ и финальным $S(P_f)$, для одного одиночного измерения с минимально возможной задержкой. В каждом эксперименте выборка представляла собой 100 случайных значений магнитного потока.

Для кубитного, кутритного с Фурье-состоянием и кутритного с ММСП паттернов составляют соответственно, одиночное single-shot измерение при минимальном времени свободной эволюции позволяет извлечь 0.23, 0.33 и 0.42 бита информации. Эти результаты показывают, что ММСП-паттерн обладает наилучшей контрастностью. Эта разница в контрастности говорит о том, что кутритный ММСП-паттерн — наиболее быстрая конфигурация, что в дальнейшем будет подтверждено сравнением среднего количества извлеченной информации после каждого шага как функции общего времени накопления фазы, которое отражает квантовую часть времени измерения.

3.1 Анализ зависимости извлеченной информации в зависимости от квантового времени измерения

Использованные алгоритмы имеют вероятности ошибки, что при сравнении требует систематического балансирования вклада этих ошибок, поскольку они влияют как на длительность отдельных шагов алгоритма, так и на среднюю точность измерения. Для алгоритмов Китаева и LAMA мы зафиксировали общую вероятность ошибки измерений на уровне 2.5%, равномерно распределив её по шагам для каждого алгоритма. В противоположность этому, в алгоритме полуклассического преобразования Фурье использовались распределённые пороговые значения вероятности: для 6 шагов

Qubit VS Qutrit protocols comparison

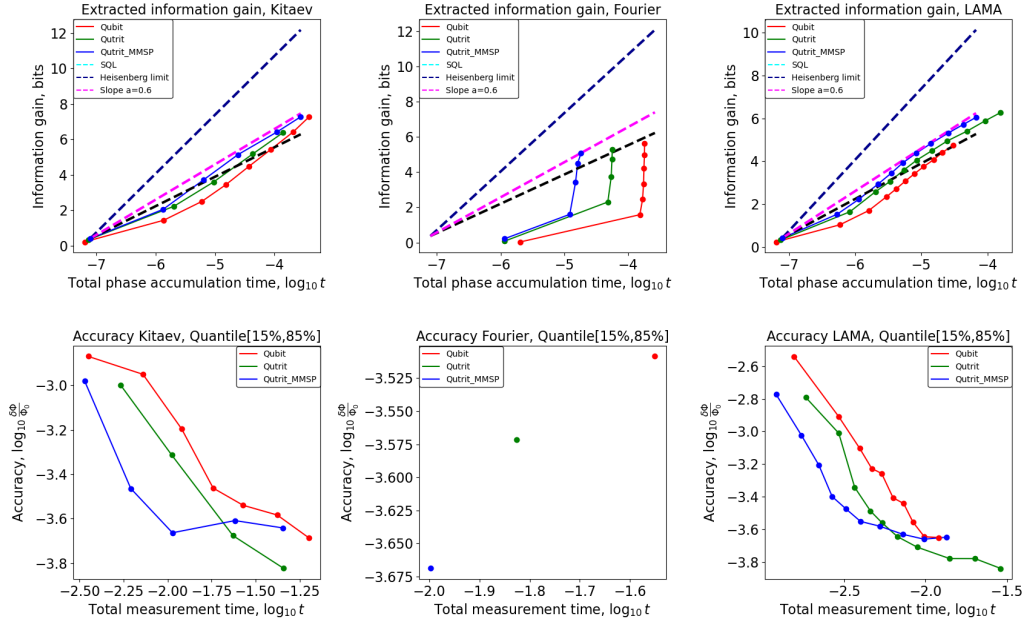


Рис. 6: На рисунке приведён сравнительный анализ кубитных и кутритных алгоритмов. **Первый ряд** рисунка демонстрирует среднюю извлеченную информацию в зависимости от общего времени накопления фазы для различных алгоритмов оценки фазы: алгоритма Китаева, алгоритма полуклассического преобразования Фурье и подхода LAMA. Для каждого алгоритма кутритный ММСП-паттерн (синяя линия) показывает превосходную производительность по сравнению с кутритным паттерном Фурье (зелёная линия) и кубитного паттерна (красная линия). Для каждого алгоритма также построен извлечённый прирост информации после однократного измерения, чтобы лучше проиллюстрировать эффективность алгоритма. Дополнительно для кутритного ММСП-паттерна нанесены масштабирование Гейзенберга (тёмно-синяя пунктирная линия), масштабирование стандартного квантового предела (SQL, чёрная пунктирная линия) и линия с наклоном $a = 0.6$ (пурпурная пунктирная линия). Реализованные алгоритмы превосходят стандартный квантовый предел и демонстрируют наклон примерно $a = 0.6$. **Второй ряд** показывает точность сенсора в зависимости от общего времени измерения для тех же алгоритмов: алгоритма Китаева, алгоритма полуклассического преобразования Фурье и подхода LAMA. Аналогично результатам прироста информации, кутритный ММСП-паттерн (синяя линия) демонстрирует лучшую производительность по сравнению с кутритным паттерном Фурье (зелёная линия) и кубитным паттерном (красная линия). Для уменьшения влияния хвостов распределения низкочастотного шума построен квантильный интервал распределения точности измерения [15%, 85%], а не среднее значение.

кубитного алгоритма полуклассического преобразования Фурье использовались вероятности ошибки на шаге: (0.1, 0.013, 0.006, 0.003, 0.0013, 0.0013), в кутритном случае для обоих паттернов были реализованы 4 шага алгоритма с вероятностями ошибки на шаге : (0.1, 0.01, 0.005, 0.002).

Повышенное значение вероятности ошибки на первом шаге (0.1) обусловлено практическими ограничениями: низкая контрастность метрологических паспортов при больших временах свободной эволюции требует такого выбора для поддержания скорости исполнения протокола. Такое асимметричное распределение ошибок позволяет оптимизировать временную эффективность.

Идеальный кутритный алгоритм Китаева извлекает один трит информации о магнитном поле за шаг алгоритма, тогда как кубитный аналог — только один бит. Однако в обоих случаях время свободной эволюции растёт с увеличением числа шагов экспоненциально как d^k , где k — номер шага, а d — размерность гильбертова пространства сенсора. Это означает, что идеальный кудитный алгоритм Китаева получает $k \log_2 d$ бит информации за общее время накопления фазы $t \propto d^k$. Следовательно, график извлечённой информации как функции логарифма времени накопления фазы является прямой линией с одинаковым наклоном для любой размерности Гильбертова пространства d . Зависимости отличаются лишь постоянным смещением. Это смещение соответствует разности извлечённой информации о магнитном поле на первом шаге измерения и составляет $\log_2 3 - 1 \approx 0.58$ бит для идеального алгоритма.

Анализ экспериментальных данных для алгоритма Китаева показывает (см. рис 4), что как в случае использования кутритного паттерна с начальным состоянием из базиса Фурье, так и в случае паттерна с начальным состоянием ММСП первый шаг алгоритма Китаева позволяет получить около одного трита информации об измеряемом магнитном поле (см. рис. 6). В реализации алгоритма Китаева мы выполняем 7 шагов для кубитных паттернов, 4 шага для кутритного паттерна с начальным состоянием из базиса Фурье и 5 шагов для конфигурации с ММСП. После первого шага все паттерны демонстрируют приблизительно параллельное линейное масштабирование, поэтому для сравнения различных метрологических паттернов необходимо извлечь постоянные сдвиги между этими линиями. При одинаковой вероятности ошибки измерения после выполнения всех шагов алгоритмов проводится линейная аппроксимация зависимостей извлеченной информации для всех типов паттернов, откуда извлекаются постоянные сдвиги. После чего производится усреднение по различным вероятностям ошибки. В результате кутритная конфигурация ММСП демонстрирует значительный прирост информации (0.60 ± 0.04) бита по сравнению с кубитным паттерном, в то время как паттерн с начальным состоянием из базиса Фурье имеет выигрыш лишь 0.48 ± 0.09 бита. Таким образом, при использовании оптимальных начальных состояний и модифицированных алгоритмов преимущество кутритной реализации сенсора совпадает с ожиданиями от идеальной модели, рассмотренной в главе 1.

Теоретически алгоритм полуклассического преобразования Фурье должен давать те же сдвиги прироста информации между кутритным и кубитным паттернами после первого шага, как и алгоритм Китаева. Однако использование распределённых порогов ошибок, низкая видность метрологических паспортов на начальном этапе и различные начальные задержки приводят к значительно более сильным эмпирическим сдвигам, что делает прямое сравнение с теоретическими ожиданиями неинформативным. Примечательно, что ММСП-паттерн демонстрирует существенно более быструю сходимость. Кроме того, хотя кубитные и кутритные паттерны в алгоритме полуклассического преобразования Фурье превосходят классический предел, паттерн

ММСП показывает явное преимущество по эффективности.

Для алгоритма LAMA можно наблюдать аналогичное алгоритму Китаева линейное поведение извлечённой информации: ММСП-паттерн даёт прирост примерно (0.51 ± 0.08) бита, в то время как кутритный Фурье-паттерн достигает лишь (0.19 ± 0.08) бита по сравнению с кубитным паттерном после первого шага. Мы используем алгоритм LAMA с параметрами, полученными в результате численной оптимизации, где кубитный паттерн на каждом шаге исключает 25% имеющихся значений потока, а кутритные — 33%.

На практике алгоритм LAMA даёт возможность извлекать всю доступную информацию из областей паспортов с высокой контрастностью, тем самым уменьшая количество необходимых single-shot измерений и ускоряя работу сенсора. Однако линейное масштабирование LAMA ограничено начальными шагами, после чего наблюдается насыщение, так как линейное увеличение времени не может обеспечить линейный прирост информации. Это означало бы экспоненциальный рост точности во времени, что в конечном итоге противоречит пределу Гейзенберга. Поэтому после некоторого, хотя и достаточно большого количества начальных шагов стандартные алгоритмы Китаева и Фурье в идеальном случае неизбежно превосходят алгоритм LAMA. В нашем эксперименте на начальных шагах алгоритм LAMA продемонстрировал лучшую эффективность по сравнению с алгоритмом Китаева, достигая разницы в постоянной линейной аппроксимации около 0.41 ± 0.09 бита для кутритного ММСП-паттерна.

Однако точность сенсора по своей природе ограничена внутренним шумом, что ведёт к конечному числу эффективных шагов как для алгоритма Китаева, так и для алгоритма Фурье из-за времени декогеренции T_2^* . Более того, низкочастотный шум может серьёзно ограничить точность, как это наблюдается в нашем случае, когда дополнительные шаги, ещё до ограничений, вызванных временем дефазировки T_2^* , становятся бесполезными из-за этого шума. Следовательно, в конкретной шумовой среде можно оптимизировать шаг времени и коэффициент исключения данных в алгоритме LAMA таким образом, чтобы он превосходил алгоритмы Китаева и Фурье до тех пор, пока шум сенсора не станет ограничивающим фактором. Дальнейший выигрыш алгоритмов Китаева и полуклассического преобразования Фурье в извлечённой информации не приведёт к улучшению точности, тогда как LAMA достигнет заданной точности быстрее этих алгоритмов.

3.2 Анализ зависимости точности измерения от полного времени измерения

При оценке практической эффективности сенсоров необходимо сравнить точность как функцию полного времени измерения для различных паттернов и алгоритмов. На практике время измерения, включающее дополнительное время зондирующих импульсов и релаксации кудита, существенно превышает время накопления фазы.

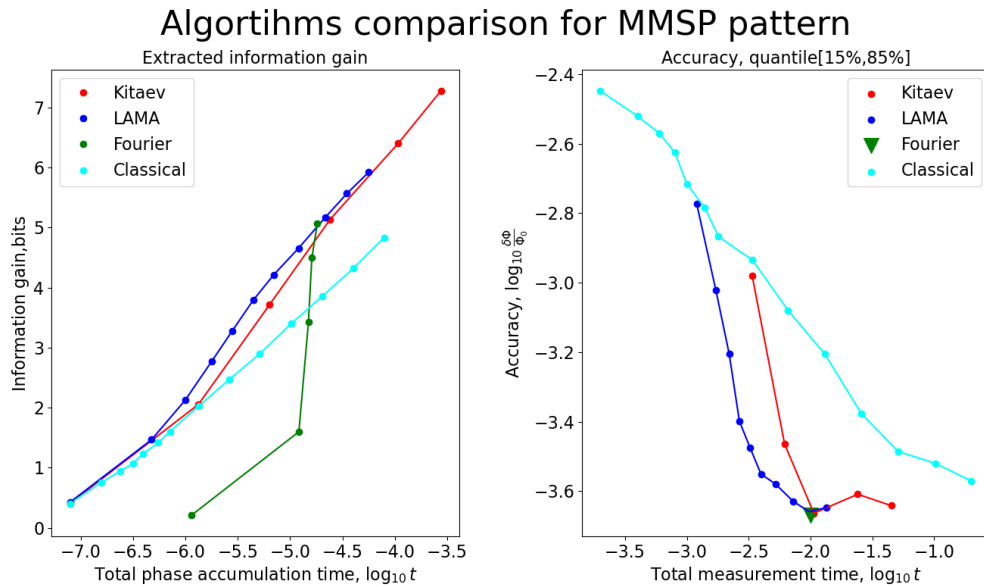


Рис. 7: На рисунке представлен сравнительный анализ алгоритмов оценки фазы, применённых к кутритному ММСП-паттерну для квантовой магнитометрии на основе кутрита. Для каждого алгоритма выбраны ошибки, обеспечивающие лучшую точность измерения.

Левый график показывает прирост информации в зависимости от общего времени накопления фазы для четырёх алгоритмов: классического (аквамариновая линия), Китаева (красная линия), полуклассического преобразования Фурье (зелёная линия) и LAMA (синяя линия). Алгоритм LAMA демонстрирует лучшую производительность при коротких временах измерения, в то время как другие алгоритмы превосходят его при увеличении длительности измерения.

Правый график иллюстрирует точность измерения относительно общего времени измерения. Наблюдаются схожие тенденции: LAMA превосходит остальные методы при коротких измерениях, но позже уступает им при более длительных периодах. Для снижения влияния хвостов распределения низкочастотного шума построен квантильный интервал [15%, 85%].

Это приводит к тому, что полное время сенсирования увеличивается линейно от шага к шагу, а не экспоненциально, как это происходит с общим временем накопления фазы. Поэтому необходимо сравнить общее количество single-shot измерений для различными паттернами и алгоритмами.

Теоретически для каждого шага алгоритма как в случае кубита, так и в случае кутрита, требуется одинаковое количество шагов, что приводит к резкому приросту точности для кутритов по сравнению с кубитами. На практике алгоритмы, реализованные на кутритном паттерне с начальным состоянием из базиса Фурье, требуют существенно больше измерений на каждом шаге, чем их аналоги, реализованные на кутритном ММСП-паттерне. В работе рассчитываем отношение времён первого шага кутрит/кубит для различных паттернов и алгоритмов. Как и для извлечённой информации, фиксируется общее значение ошибки и производится усреднение по различным вероятностям ошибки. Для первого шага алгоритма Китаева это отношение составляет 0.95 ± 0.03 для ММСП- и 1.36 ± 0.15 для кутритного Фурье-паттерна. После 3 шагов алгоритма это приводит к примерно четырёхкратному улучшению точности измерения для ММСП-паттерна по сравнению с кубитным протоколом

(см. рис. 7), в то время как кутритный Фурье-паттерн достигает лишь примерно 1.5-кратного прироста. Такой результат вновь согласуется с теоретическими ожиданиями от идеальной модели. Для протокола LAMA наблюдаются аналогичные соотношения: 1.02 ± 0.09 для ММСП-паттерна и 1.45 ± 0.08 для Фурье-паттерна. В отличие от этого, алгоритм полуклассического преобразования Фурье демонстрирует лучшую производительность для Фурье-паттерна на финальном шаге, поскольку этот паттерн оптимален для дискретных распределений магнитного поля, тогда как ММСП-паттерн более эффективен при непрерывных распределениях. Однако на первом шаге ММСП-паттерн оказывается значительно более эффективным, с отношением 0.14 ± 0.01 по сравнению с 0.45 ± 0.03 для Фурье-паттерна.

Сравнение различных алгоритмов показывает, что линейный восходящий метрологический алгоритм (LAMA) требует меньше шагов на начальных этапах и значительно превосходит традиционные алгоритмы Китаева и полуклассического преобразования Фурье в течение нескольких первых шагов. Однако далее LAMA становится по сути классическим, тогда как алгоритмы с экспоненциальным ростом времени свободной эволюции продолжают демонстрировать квантовое поведение. В конечном итоге все алгоритмы сталкиваются с насыщением из-за внутреннего шума сенсора. Оптимизируя параметры LAMA, можно добиться более быстрого измерения, превосходящего традиционные алгоритмы, если вызванные шумами ограничения точности возникают раньше, чем алгоритмы Китаева и полуклассического преобразования Фурье успевают обогнать LAMA.

В конечном счёте мы можем оценить точность нашего сенсора. Для кутритного ММСП-паттерна достигается точность $2.5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для всех алгоритмов. Другие паттерны дают более низкие значения точности: $5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для кубитных алгоритмов Китаева и Фурье и $2.5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для алгоритма LAMA. Для кутритного Фурье-паттерна мы получаем $3.2 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для алгоритма Китаева, $4.5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для алгоритма Фурье и $2.5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$ для алгоритма LAMA. Очевидно, что кутритный ММСП-паттерн на кутрите значительно быстрее, чем остальные паттерны, при измерении непрерывно распределённых переменных с помощью алгоритмов оценки фазы. Также показано, что алгоритм LAMA в условиях внешнего шума демонстрирует лучшие характеристики по сравнению с традиционными алгоритмами Фурье и Китаева.

Характерное время низкочастотного шума можно оценить. По случайному стечению во время измерений для кутритного Фурье-паттерна не использовался оптимизированный код для потоковой загрузки данных, что привело к поочерёдной обработке одиночных результатов без применения быстрых последовательностей. В результате точность для этого паттерна насыщается значительно позже, чем для других, что позволяет нам оценить характерное время низкочастотного шума в несколько минут. Соответствующая модель при моделировании показала соответствие с экспериментальными данными при характерном масштабе шума в 2-3 шага для магнитного

потока в метрологических паспортах.

3.3 Сравнение полученных результатов с альтернативными платформами

Настоящий анализ позволяет нам сравнить наш магнетометр с другими типами устройств: сверхпроводящими квантовыми интерференционными устройствами (SQUID), азото-замещёнными вакансиями в алмазе (NV-центрами), магнетометрами на парах атомов щелочных металлов, сосредотачиваясь на их чувствительности в $T/\sqrt{\text{Гц}}$ и эксплуатационных преимуществах. Стоит сразу отметить важное преимущество устройств, имеющих в своём составе SQUID, а именно то, что такие устройства измеряют интегральную характеристику магнитного поля - магнитный поток, тогда как атомы могут улавливать только локальное магнитное поле. Это позволяет использовать специальные трансформаторы и существенно повышать чувствительность к магнитному полю за счёт увеличения площади поперечного сечения. Таким образом, магнетометры, например, на NV-центрах обладают нанометровым пространственным разрешением, однако при этом такие магнетометры имеют чувствительность лишь порядка 10^{-7} . Рассмотрим достигнутые на разных платформах точности.

Сверхпроводящие DC-SQUID и RF-SQUID достигают чувствительности порядка $\sim 1\mu\Phi_0/\sqrt{\text{Гц}}$ [27].

Ансамбли NV-центров достигают чувствительности порядка $\sim 1, \text{пТ}/\sqrt{\text{Гц}}$ [28] с миллиметровым разрешением.

Атомные магнетометры, использующие ячейки с парами щелочных металлов, обеспечивают пространственное разрешение на уровне сантиметров и чувствительность лучше $1, \text{фТ}/\sqrt{\text{Гц}}$ [29] без необходимости криогенного охлаждения. Их чувствительность масштабируется как $\delta B \sim 1/\sqrt{NT_2t}$, где N — число атомов, что позволяет находить компромисс между пространственным разрешением и пределами обнаружения магнитного поля.

Представленный в работе сенсор на основе сверхпроводящих трансмонов, использующий алгоритмы фазовой оценки, достигает чувствительности порядка $\sim 2.5 \cdot 10^{-5}, \Phi_0/\sqrt{\text{Гц}}$, демонстрируя масштабирование точности, превышающее стандартный квантовый предел. Эта производительность может быть существенно улучшена — на 1–1.5 порядка — за счёт реализации фильтра Парселла и протокола быстрой инициализации. Несмотря на необходимость охлаждения до температур порядка 10мК , трансмонные сенсоры открывают путь к созданию быстрых и точных сенсоров магнитного поля.

4 Заключение

В ходе работы проведён комплексный анализ преимуществ использования трёхуровневых систем и алгоритма линейного восходящего метрологического алгоритма оцен-

ки фазы (ЛАМА) для квантовых магнитометров на базе сверхпроводящих трансмонов. Экспериментальные данные показали, что кутритная реализация с оптимальным ММСП-паттерном позволяет получить значительный прирост извлекаемой информации — до 0.60 ± 0.04 бита по сравнению с кубитными аналогами, что согласуется с теоретическим пределом. Это преимущество реализуется уже на первых шагах алгоритма, обеспечивая ускоренное достижение высокой точности измерения: после трёх шагов точность возрастает примерно в четыре раза по сравнению с кубитными протоколами.

Алгоритм ЛАМА, оптимизированный под параметры сенсора, демонстрирует лучшие характеристики на начальных этапах измерения по сравнению с традиционными алгоритмами Китаева и полуклассического преобразования Фурье. Он позволяет быстрее достигать заданной точности за счёт эффективного использования областей паспортов с высокой контрастностью и уменьшения числа необходимых single-shot измерений. Однако его преимущество ограничено начальными шагами из-за насыщения, вызванного внутренним шумом сенсора, после чего экспоненциально масштабируемые алгоритмы начинают превосходить ЛАМА. Тем не менее, в условиях реального шума ЛАМА остаётся более эффективным до наступления ограничений, связанных с декогеренцией и низкочастотным шумом.

Разработанный магнитометр на базе трансмона с использованием кутритного ММСП-паттерна и алгоритма ЛАМА достигает чувствительности $2.5 \times 10^{-5} \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$, что уступает возможностям DC и RF-SQUID ($\sim 1, \mu \Phi_0 / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$), NV-центров ($\sim 1, \text{пТ} / \sqrt{\Gamma \text{ц}}$) и сопоставимо с лучшими атомными магнитометрами. Перспективы дальнейшего повышения чувствительности связаны с внедрением фильтра Парселла и протоколов быстрой инициализации, что может дать дополнительное улучшение на 1–1.5 порядка. Несмотря на необходимость криогенного охлаждения, трансмонные сенсоры открывают путь к созданию высокоскоростных и высокоточных квантовых магнитометров для задач, требующих быстрого и точного измерения слабых магнитных полей.

Таким образом, сочетание кутритных систем и алгоритма ЛАМА обеспечивает существенный прирост эффективности квантовых магнитометров на трансмонах.

Список литературы

- [1] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum measurement bounds beyond the uncertainty relations. *Physical Review Letters*, 108(26):260405, 2012.
- [2] Tomohisa Nagata, Ryo Okamoto, Jeremy L O'brien, Keiji Sasaki, and Shigeki Takeuchi. Beating the standard quantum limit with four-entangled photons. *Science*, 316(5825):726–729, 2007.

- [3] AR Shlyakhov, VV Zemlyanov, MV Suslov, Andrey V Lebedev, Gheorghe S Paraoanu, Gordey B Lesovik, and Gianni Blatter. Quantum metrology with a transmon qutrit. *Physical Review A*, 97(2):022115, 2018.
- [4] Jens Koch, Terri M Yu, Jay Gambetta, Andrew A Houck, David I Schuster, Johannes Majer, Alexandre Blais, Michel H Devoret, Steven M Girvin, and Robert J Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 76(4):042319, 2007.
- [5] David Isaac Schuster. *Circuit quantum electrodynamics*. Yale University, 2007.
- [6] Массачусетс Нильсен and И Чанг. Квантовые вычисления и квантовая информация, 2006.
- [7] Wim van Dam, G Mauro D’Ariano, Artur Ekert, Chiara Macchiavello, and Michele Mosca. Optimal quantum circuits for general phase estimation. *Physical review letters*, 98(9):090501, 2007.
- [8] A Yu Kitaev. Quantum measurements and the abelian stabilizer problem. *arXiv preprint quant-ph/9511026*, 1995.
- [9] Tomasz Kaftal and Rafał Demkowicz-Dobrzański. Usefulness of an enhanced kitaev phase-estimation algorithm in quantum metrology and computation. *Physical Review A*, 90(6):062313, 2014.
- [10] Аркадий Евгеньевич Шемякин. Интегральные неравенства типа Рао–Крамера для оценок векторного параметра. *Теория вероятностей и ее применения*, 32(3):469–477, 1987.
- [11] Christian L Degen, Friedemann Reinhard, and Paola Cappellaro. Quantum sensing. *Reviews of modern physics*, 89(3):035002, 2017.
- [12] Karol Gietka and Tomasz WASAK. *Quantum Metrology with Atoms and Light*. PhD thesis, 2018.
- [13] Luca Pezze and Augusto Smerzi. Quantum theory of phase estimation. In *Atom interferometry*, pages 691–741. IOS Press, 2014.
- [14] AV Lebedev, Philipp Treutlein, and Gianni Blatter. Sequential quantum-enhanced measurement with an atomic ensemble. *Physical Review A*, 89(1):012118, 2014.
- [15] Akio Fujiwara. Quantum channel identification problem. *Physical Review A*, 63(4):042304, 2001.
- [16] Dietmar G Fischer, Holger Mack, Markus A Cirone, and Matthias Freyberger. Enhanced estimation of a noisy quantum channel using entanglement. *Physical Review A*, 64(2):022309, 2001.

- [17] David J Wineland, John J Bollinger, Wayne M Itano, FL Moore, and Daniel J Heinzen. Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy. *Physical Review A*, 46(11):R6797, 1992.
- [18] Murray J Holland and Keith Burnett. Interferometric detection of optical phase shifts at the heisenberg limit. *Physical review letters*, 71(9):1355, 1993.
- [19] Terry Rudolph and Lov Grover. Quantum communication complexity of establishing a shared reference frame. *Physical review letters*, 91(21):217905, 2003.
- [20] Mark De Burgh and Stephen D Bartlett. Quantum methods for clock synchronization: Beating the standard quantum limit without entanglement. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 72(4):042301, 2005.
- [21] Alfredo Luis. Phase-shift amplification for precision measurements without nonclassical states. *Physical Review A*, 65(2):025802, 2002.
- [22] Michael R Perelshtein, NS Kirsanov, VV Zemlyanov, AV Lebedev, Gianni Blatter, VM Vinokur, and GB Lesovik. Linear ascending metrological algorithm. *Physical Review Research*, 3(1):013257, 2021.
- [23] David T Pegg and Stephen M Barnett. Quantum optical phase. *Journal of Modern Optics*, 44(2):225–264, 1997.
- [24] Liangyu Chen, Hang-Xi Li, Yong Lu, Christopher Warren, Christian Križan, Sandoko Kosen, Marcus Rommel, Shahnawaz Ahmed, Amr Osman, Janka Biznárová, Anita Fadavi, Benjamin Lienhard, Marco Caputo, Kestutis Grigoras, Leif Grönberg, Joonas Govenius, Anton Frisk Kockum, Per Delsing, Jonas Bylander, and Giovanna Tancredi. Transmon qubit readout fidelity at the threshold for quantum error correction without a quantum-limited amplifier. *npj Quantum Information*, 9, 03 2023.
- [25] Rohit Navarathna, Tyler Jones, Tina Moghaddam, Anatoly Kulikov, Rohit Beriwal, Markus Jerger, Prasanna Pakkiam, and Arkady Fedorov. Neural networks for on-the-fly single-shot state classification. *Applied Physics Letters*, 119(11), 2021.
- [26] Sergey Danilin, A Vepsäläinen Lebedev, Antti Vepsäläinen, Gordey B Lesovik, Gianni Blatter, and GS Paraoanu. Quantum-enhanced magnetometry by phase estimation algorithms with a single artificial atom. *npj Quantum Information*, 4(1):29, 2018.
- [27] Bingke Xiang, Yihua Wang, Hao Li, and Shane A. Cybart. Fabrication and application of nano-squid magnetometer to scanning imaging of two-dimensional quantum materials. *Electromagnetic Science*, 2(2):1–15, 2024.
- [28] Thomas Wolf, Philipp Neumann, Kazuo Nakamura, Hitoshi Sumiya, Takeshi Ohshima, Junichi Isoya, and Jörg Wrachtrup. Erratum: Subpicotesla diamond

magnetometry [phys. rev. x 5, 041001 (2015)]. *Physical Review X*, 13(2):029903, 2023.

- [29] Iannis K Kominis, Thomas W Kornack, Joel C Allred, and Michael V Romalis. A subfemtotesla multichannel atomic magnetometer. *Nature*, 422(6932):596–599, 2003.