

Общество с ограниченной ответственностью «Международный центр  
квантовой оптики и квантовых технологий»

На правах рукописи

Симаков Илья Алексеевич

**Микроволновая двухкубитная операция и коррекция  
квантовых ошибок на сверхпроводниковых кубитах**

Специальность 1.3.8 —

«Физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
Устинов Алексей Валентинович  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Москва — 2025

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Теоретические сведения и обзор литературы</b>	<b>12</b>
1.1 Основы квантовых вычислений . . . . .	13
1.1.1 Квантовый бит . . . . .	13
1.1.2 Квантовые операции . . . . .	14
1.1.3 Представление операторной суммой . . . . .	16
1.1.4 Матрица переноса Паули . . . . .	18
1.2 Квантовые вычисления на сверхпроводниковых системах . . . . .	18
1.2.1 Физические основы сверхпроводниковых кубитов . . . . .	18
1.2.2 Кубит-флакониум . . . . .	20
1.2.3 Двухкубитные операции на флакониумах: современные достижения . . . . .	22
1.3 Коды коррекции квантовых ошибок . . . . .	24
1.3.1 Постановка задачи . . . . .	24
1.3.2 Квантовый код повторений . . . . .	27
1.3.3 Формализм стабилизаторов . . . . .	30
1.3.4 Пятикубитный код . . . . .	34
1.3.5 Поверхностный код . . . . .	35
1.4 Выводы по главе . . . . .	36
<b>2 Микроволновая двухкубитная операция CZ на флакониумах</b>	<b>38</b>
2.1 Концепция микроволновой операции CZ . . . . .	39
2.1.1 Зависимость частоты соединительного элемента от состо- яния вычислительных кубитов . . . . .	39
2.1.2 Резонансная микроволновая двухкубитная операция . . . . .	41
2.1.3 Околорезонансная микроволновая двухкубитная операция . . . . .	43
2.2 Экспериментальная реализация . . . . .	46
2.2.1 Описание двухкубитного образца . . . . .	46
2.2.2 Экспериментальная установка . . . . .	49

2.2.3	Базовые однокубитные операции . . . . .	52
2.2.4	Метод считывания соединительного элемента . . . . .	54
2.2.5	Измерение частотных характеристик соединительного эле- мента . . . . .	56
2.2.6	Калибровка двухкубитной операции . . . . .	56
2.3	Оценка точности квантовой операции . . . . .	59
2.3.1	Методы оценки точности квантовых операций . . . . .	59
2.3.2	Квантовая томография процесса . . . . .	61
2.3.3	Эксперимент по квантовой томографии процесса . . . . .	62
2.3.4	Перекрестно-энтропийное тестирование . . . . .	64
2.3.5	Экспериментальная реализация перекрестно-энтропийного тестирования . . . . .	67
2.3.6	Анализ ошибок, влияющих на точность операции . . . . .	71
2.4	Выводы по главе . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Коды коррекции квантовых ошибок циклической архитектуры</b>	<b>75</b>
3.1	Построение циклических кодов коррекции . . . . .	76
3.1.1	Концепция переадресуемого вспомогательного кубита . . . . .	76
3.1.2	Квантовая схема пятикубитного кода на iSWAP гейтах . . . . .	77
3.1.3	Масштабирование для малых дистанций . . . . .	80
3.1.4	Количество требуемых кубитов и двухкубитных операций . . . . .	83
3.1.5	Квантовая схема 17-кубитного поверхностного кода . . . . .	85
3.2	Модели ошибок . . . . .	87
3.2.1	Число корректируемых ошибок . . . . .	87
3.2.2	Модель ошибок при численном расчете временной эволю- ции матрицы плотности . . . . .	88
3.2.3	Феноменологическая модель ошибок . . . . .	91
3.3	Алгоритмы декодирования кодов коррекции ошибок . . . . .	94
3.3.1	Постановка задачи и оценка верхней границы точности ра- боты кодов коррекции . . . . .	94
3.3.2	Подходы к реализации процесса декодирования . . . . .	95

3.3.3	Модифицированный алгоритм декодирования на основе таблицы поиска . . . . .	96
3.3.4	Архитектура нейронного декодера . . . . .	98
3.4	Результаты численного моделирования . . . . .	100
3.4.1	Анализ эффективности пятикубитного кода . . . . .	100
3.4.2	Исправление ошибок для произвольного начального состояния . . . . .	104
3.4.3	Подавление ошибок при масштабировании . . . . .	107
3.4.4	Эффективность нейронного декодера . . . . .	109
3.5	Выводы по главе . . . . .	111
	<b>Заключение</b>	<b>114</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>117</b>



# Введение

## Актуальность работы

Квантовые вычисления достигли значительных успехов за последние десятилетия, несмотря на серьезные концептуальные, теоретические и технические трудности, возникающие на пути. Среди множества прорывных достижений, сопровождавших развитие области, можно отметить две. Первая — алгоритм факторизации Шора [1, 2], который позволяет решить экспоненциально сложную задачу за полиномиальное время и тем самым положил начало широкому интересу к идее квантового процессора. Вторая — теория коррекции квантовых ошибок [3–5], направленная на преодоление фундаментальной проблемы декогеренции и дающая уверенность в том, что создание полноценных квантовых устройств действительно возможно.

Исследовательские группы по всему миру, начав с базовых экспериментов по управлению одиночными квантовыми системами, перешли к работе с квантовыми процессорами, содержащими несколько десятков физических кубитов, и показали превосходство квантового компьютера над классическим, пусть и лишь для специально подобранных задач [6–9]. А в последние годы удалось экспериментально показать, что коды коррекции квантовых ошибок не только могут успешно справляться с возникающими ошибками [10–15], но и с их помощью можно получить логические кубиты, обладающие лучшими когерентными свойствами, чем физические кубиты, на которых они реализованы [16].

До сих пор остается открытым вопрос, какой именно физический принцип будет стоять за практически полезным квантовым процессором. Для реализации кубитов предложено множество вариантов, среди которых на сегодняшний день можно выделить ионы в оптических ловушках [17, 18], ультрахолодные атомы [19, 20], спины электронов в кремнии [21, 22], поляризацию фотонов [23, 24], квантовые точки [25, 26] и сверхпроводниковые электрические цепи [27].

Несмотря на то, что все эти платформы развиваются параллельно, благодаря существованию отработанных на классических процессорах методов микролитографии [28] и разнообразию управляющей электроники, работающей в ги-

гагерцовом диапазоне [29], именно сверхпроводниковые кубиты считаются наиболее перспективными кандидатами для создания масштабируемого квантового процессора, устойчивого к ошибкам. Их часто называют искусственными атомами, подчеркивая возможность реализовать квантовую систему с практически любыми заранее заданными свойствами энергетического спектра, что обеспечивается широким выбором возможных параметров и методов реализации связи логических операций.

Первый сверхпроводниковый кубит был сделан группой японских физиков в самом конце двадцатого века [30]. Они впервые показали когерентное состояние суперпозиции с использованием так называемого «ящика куперовских пар» или, другими словами, зарядового кубита, что послужило спусковым крючком для активного экспериментального развития области, появлению новых типов кубитов и усовершенствованию методов управления. Среди знаковых достижений можно выделить реализацию дисперсионного считывания кубита с помощью копланарного резонатора [31, 32] и создание трансмона [33] — самого распространенного на сегодняшний день типа сверхпроводниковых кубитов.

Именно на трансмонах сделаны наиболее производительные на сегодняшний день сверхпроводниковые квантовые процессоры Sycamore и Willow (Google, США), Heron (IBM, США) и Zuchongzhi (Китай). Этими крупными коллективами были проделаны колоссальные усилия по созданию масштабируемых квантовых процессоров, при этом особое внимание уделялось снижению уровня ошибок и повышению стабильности одновременной работы большого числа кубитов. В 2024 году Google представила 105-кубитный квантовый процессор, преодолевший пороговое значение, при котором с увеличением числа кубитов частота ошибок не растет, а снижается, что является значительным достижением в области коррекции квантовых ошибок [16].

Наряду с крупными компаниями огромный вклад в развитие сверхпроводниковых квантовых вычислений вносят исследовательские научные группы по всему миру: США, Швейцарии, Китая, Нидерландов, Японии, Германии, России и многих других стран. Эти работы направлены на улучшение когерентности и управляемости квантовых систем. Разработка новых типов кубитов

[34–37], способов считывания [38, 39] и инициализации [40, 41], эффективных методов управления [42] являются ключевыми направлениями научных исследований для обеспечения надежности и эффективности квантовых вычислений. Важной задачей остается совершенствование выполнения двухкубитных операций [43–45], поскольку их точность определяющим образом влияет на эффективность квантовых алгоритмов и эффективность методов коррекции ошибок.

Помимо кубитов-трансмонов, все большее внимание исследователей привлекают кубиты-флакониумы, обладающие высокой когерентностью [46, 47] и вариативностью реализации высокоточных двухкубитных операций. Именно на кубитах этого типа продемонстрированы рекордные по точности однокубитные [48] и двухкубитные операции [49]. Сейчас и в ближайшие несколько лет основной фокус исследований в этом направлении вероятнее всего будет направлен на масштабирование флакониумных процессоров [50].

## Цель работы

Цель данной диссертационной работы заключается в разработке и экспериментальной реализации методов выполнения двухкубитных операций на сверхпроводниковых кубитах-флакониумах, а также в создании эффективных кодов коррекции квантовых ошибок для процессоров с ограниченной связностью.

Для достижения намеченной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Предложить метод реализации двухкубитной операции на сверхпроводниковых кубитах-флакониумах без перестройки магнитного потока в элементе связи;
2. Экспериментально реализовать предложенную микроволновую двухкубитную операцию и оценить точность методом перекрестно-энтропийного тестирования;
3. Разработать способ масштабирования пятикубитного кода коррекции квантовых ошибок для процессоров циклической связности и выполнить численное моделирование, характеризующее эффективность предложенного

подхода;

4. Предложить и реализовать алгоритм декодирования квантовых ошибок, основанный на искусственных нейронных сетях.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Микроволновое возбуждение соединительного элемента между двумя кубитам-флаксоиумами позволяет выполнить двухкубитную операцию CZ. Точность экспериментально реализованной операции составила 97,6 % при длительности 44 нс.
2. Динамическая переадресация физических кубитов позволяет реализовать пятикубитный код коррекции квантовых ошибок и линейно по числу физических кубитов масштабировать его на малых дистанциях  $d = 5, 7, 9$ .
3. Алгоритм декодирования на основе искусственных нейронных сетей позволяет эффективно исправлять ошибки в кодах коррекции со стабилизаторами высокого веса ( $w = 4, 6, 8$ ) и смешанного типа, отвечающими одновременно битовым и фазовым ошибкам.

### **Научная новизна исследования**

В данной работе предложен и впервые реализован новый метод выполнения двухкубитной операции на кубитах-флаксоиумах, основанный на микроволновом возбуждении дополнительного связующего кубита, частота которого зависит от вычислительного состояния системы. Важно отметить, что схожие исследования в это время были выполнены в Массачусетском технологическом институте [45] (предварительная версия публикации появилась на интернет-ресурсе arXiv после публикации результатов, описанных в диссертационной работе). Возможность выполнения такой операции с высокой точностью открывает перспективы реализации запутывающих операций в масштабируемых сверхпроводниковых квантовых процессорах на основе флаксоиумов, оставляя кубиты в оптимальных точках по потоку в течение всего времени работы. Предложен оригинальный метод коррекции квантовых ошибок, использующий

динамическую переадресацию физических кубитов, что позволяет эффективно реализовывать пятикубитный код на процессорах с циклической связностью. Также разработан и исследован алгоритм декодирования квантовых ошибок на основе искусственных нейронных сетей, обеспечивающий экспоненциальное снижение вероятности логической ошибки и успешно работающий в условиях неразделимых синдромов ошибок  $X$  и  $Z$  высокого веса.

## **Практическая значимость работы**

Полученные результаты открывают новые возможности в работе с кубитами-флаксоунами. В первую очередь это касается дальнейшего масштабирования устройств и исследования топологических особенностей системы для увеличения времен когерентности кубитов и повышения точности управления. В работе реализованы оригинальные идеи выполнения двухкубитных квантовых операций, что позволяет эффективно осуществлять не только двухкубитные вентили, но и многокубитные операции [51]. Предложенный подход к коррекции квантовых ошибок с использованием динамической переадресации физических кубитов снижает требования к количеству физических кубитов и связности квантового процессора. Алгоритм декодирования на основе искусственных нейронных сетей позволяет исправлять ошибки, в том числе в условиях их высокой коррелированности. Главное его преимущество заключается в способности обучаться на данных, полученных непосредственно с конкретного устройства, что особенно важно, если реальный характер ошибок отличается от теоретических моделей. Кроме того, алгоритм не зависит от конкретного кода коррекции, что делает его универсальным при работе с различными архитектурами квантовых кодов и процессоров.

## **Личный вклад автора**

Автор самостоятельно выполнил аналитические и численные расчеты динамики квантовой системы, соответствующей выполнению двухкубитной операции, принимал активное участие в подготовке и постановке эксперимента,

проведении измерений и обработке экспериментальных результатов. Автор выполнил численное моделирование кода коррекции ошибок на циклической архитектуре и непосредственно участвовал в разработке и усовершенствовании алгоритма декодирования на основе искусственных нейронных сетей. Кроме того, автор принимал активное участие в анализе и интерпретации всех полученных результатов и подготовке работ к публикациям.

## **Апробация работы**

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, докладывались на следующих конференциях:

- 6th International Conference on Quantum Technologies ICQT-2021, Москва, Россия, июль 2021 (стендовый доклад)
- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Москва, Россия, апрель 2022 (устный доклад)
- Математика в квантовых технологиях – 2022, Москва, Россия, декабрь 2022 (устный доклад)
- IV Annual Outdoor Conference on Quantum Computing, Эстосадок, Россия, февраль 2023 (устный доклад)
- 65th All-Russian Scientific Conference of MIPT, Долгопрудный, Россия, апрель 2023 (устный доклад)
- 7th International Conference on Quantum Technologies ICQT-2023, Москва, Россия, июль 2023 (стендовый доклад)
- V Annual Outdoor Conference on Quantum Computing, Эстосадок, Россия, февраль 2024 (устный доклад)
- XXIX Симпозиум «Нанопфизика и наноэлектроника», Нижний Новгород, Россия, март 2025 (устный доклад)

## **Публикации**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 статьях, опубликованных в периодических научных журналах, входящих в перечень ВАК РФ и индексируемых Web of Science и Scopus.

## **Достоверность**

Достоверность результатов работы подтверждается соответствием между теоретическими выкладками, результатами численного моделирования и экспериментально полученными данными. Используемые в исследовании экспериментальные и численные методы широко применяются в мировом научном сообществе; в тексте приведены соответствующие ссылки на источники. Основные положения и выводы работы прошли независимое рецензирование в международных и российских научных журналах, а также апробацию на конференциях и семинарах.

## **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 130 страниц, включая 33 рисунка и 6 таблиц, список литературы содержит 134 наименования.

# 1 Теоретические сведения и обзор литературы

Результаты диссертационной работы можно разделить на две смысловые части: экспериментальную реализацию нового метода выполнения двухкубитной операции на кубитах-флаксоунах и разработку кодов коррекции квантовых ошибок на циклической архитектуре, для которой и необходимы квантовые процессоры с высокой точностью операций. Первая глава служит введением в обе эти части и предлагает краткий теоретический обзор, необходимый для понимания последующих глав диссертации. Она состоит из трех подразделов.

Первый подраздел излагает уже ставшие хрестоматийными за последние годы сведения об основах квантовых вычислений [52] и определяет основные математические понятия, используемые в работе. Несмотря на их привычный характер, эти определения необходимо привести во избежание разночтений.

Второй подраздел кратко описывает принципы работы сверхпроводниковых кубитов. На сегодняшний день существует множество подробных обзоров [29, 53–59], включая русскоязычные диссертационные исследования [60–62], в которых детально рассмотрены принципы работы квантовых вычислительных устройств на основе сверхпроводниковых систем. Поэтому в данной части основной акцент сделан на обсуждении современных достижений в области двухкубитных операций с использованием кубитов-флаксоунов.

Наконец, третий подраздел посвящен основам коррекции квантовых ошибок. Формулируется постановка задачи, на простом примере поясняются ключевые принципы кодирования логической информации и исправления ошибок, вводится формализм стабилизаторов [63] и приводятся примеры наиболее известных кодов коррекции, включая те, которые будут использоваться в данной работе.



## 1.1 Основы квантовых вычислений

### 1.1.1 Квантовый бит

Классический бит является базовой единицей информации, лежащей в основе современных вычислительных систем. Он обозначает логическое состояние, которое может принимать одно из двух возможных значений — 0 или 1. Эти состояния соответствуют различным физическим реализациям, например, уровням напряжения в электрических цепях или положениям механических переключателей. Работа классического компьютера основана на возможности манипуляции большими наборами таких битов для выполнения вычислений и обработки данных.

Квантовый бит, или кубит, представляет собой квантовую систему с двумя энергетическими уровнями, которая расширяет понятие классического бита, основываясь на принципиально иных квантовых принципах. Кубит может находиться в одном из двух базисных состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , однако, в отличие от классического бита, он также может существовать в их суперпозиции. Состояние одного кубита может быть описано волновой функцией:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные коэффициенты, удовлетворяющие условию нормировки:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , а состояния

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

образуют базис в двухмерном комплексном гильбертовом пространстве.

Удобно переписать волновую функцию состояния одного кубита (1.1) в параметрическом виде с использованием полярного и азимутального углов:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (1.3)$$

Такое представление позволяет визуализировать состояние кубита на сфере Блоха, как показано на рисунке 1.1. Кроме того, на рисунке отмечены 6 со-

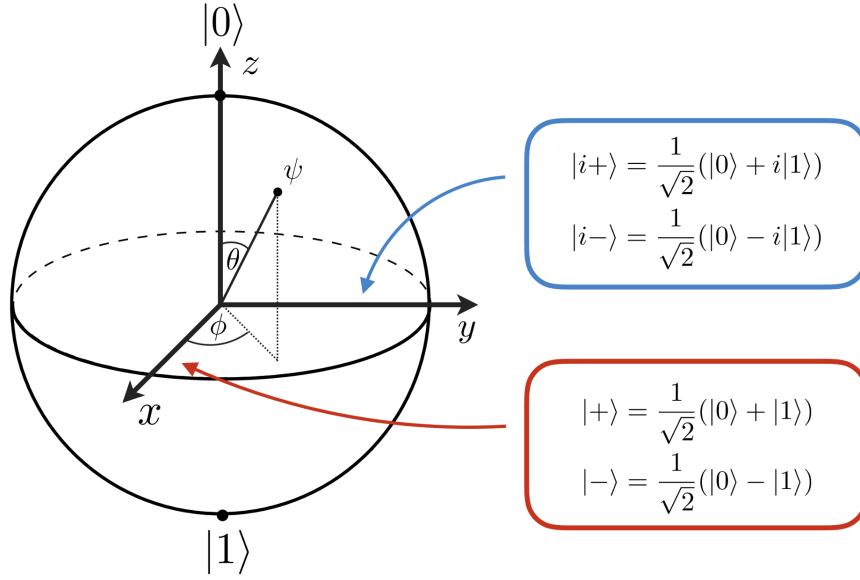


Рисунок 1.1: Сфера Блоха, волновая функция  $\psi$  и состояния на полюсах.

Рисунок адаптирован из работы [64].

стояний, сонаправленных с осями координат и являющихся собственными состояниями операторов  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  с собственными значениями  $+1$  и  $-1$ .

Система, состоящая из нескольких кубитов, описывается с использованием тензорного произведения, обозначаемого как  $\otimes$ . Иногда этот символ опускается для сокращения записи, например:

$$|00 \cdots 0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle. \quad (1.4)$$

Волновая функция описывает только чистые квантовые состояния. Для описания смешанных состояний вводится матрица плотности, которая может быть комбинацией чистых состояний  $|\psi_i\rangle$ , каждое из которых имеет вероятность  $p_i$ :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.5)$$

где  $\rho$  — это положительный оператор с условием  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

### 1.1.2 Квантовые операции

Распространенным подходом к описанию квантовых алгоритмов является представление в виде квантовых схем. Это означает, что любое действие над системой из  $n$  кубитов может быть выражено через унитарную матрицу размера

$2^n \times 2^n$ , обозначаемую  $U$ :

$$\psi \rightarrow U\psi \quad (1.6)$$

для волновой функции и

$$\rho \rightarrow U\rho U^\dagger \quad (1.7)$$

для матрицы плотности.

В некоторых случаях такие операции называют квантовыми вентилями или гейтам. Последний термин, хоть и является англицизмом, уже прочно вошел в обиход, поэтому будет часто использоваться в тексте. Ниже приведен перечень квантовых операций, используемых в данной работе:

1. Операция тождества:

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

2. Операции вращения вокруг осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  сферы Блоха:

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \\ R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Операции вращения на угол  $\pi$  соответствуют матрицам Паули:

$$\sigma_1 = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

3. Гейт Адамара ( $H$ ) и операция фазового вращения на угол  $\pi/2$  ( $S$ ):

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

4. Многокубитные гейты CZ, CNOT, iSWAP и SWAP:

$$\begin{aligned} \text{CZ} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \text{CNOT} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{iSWAP} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{SWAP} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Наконец, в работе используется процедура проективного измерения. Эта процедура задается набором наблюдаемых операторов  $M_i$ , где индекс  $i$  соответствует результату измерения. Для этих операторов выполняется условие:

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I. \quad (1.13)$$

Вероятность каждого результата измерения рассчитывается по формуле:

$$p_i = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho), \quad (1.14)$$

а состояние системы после измерения, если результат известен, задается выражением:

$$\rho \rightarrow \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)}. \quad (1.15)$$

### 1.1.3 Представление операторной суммой

Формализм унитарных преобразований применяется для описания идеальных замкнутых квантовых систем. Однако в реальном мире идеально замкнутых систем не существует, поскольку любая система взаимодействует с окружающей средой. Это взаимодействие, называемое шумом, приводит к необходимости учитывать его влияние. Для этого естественно рассмотреть расширенную систему, включающую саму квантовую систему и окружающую среду, как показано на рисунке 1.2. Вместе эти две подсистемы образуют замкнутую систему,

эволюция которой для интересующей нас системы описывается следующим образом:

$$\Lambda(\rho) = \text{Tr}_{\text{env}} (U(\rho \otimes \rho_{\text{env}})U^\dagger), \quad (1.16)$$

где  $\Lambda(\rho)$  обозначает изменение матрицы плотности квантовой системы под действием внешнего окружения,  $U$  — унитарный оператор эволюции, действующий на всю систему, а  $\text{Tr}_{\text{env}}$  — частичный след по подсистеме окружающей среды.

Если  $|e_k\rangle$  — ортонормированный базис в пространстве окружающей среды, а начальное состояние окружения задано матрицей плотности  $\rho_{\text{env}} = |e_0\rangle\langle e_0|$  (такое представление всегда возможно, так как пространство окружения можно расширить так, чтобы оно описывалось чистым состоянием), то выражение для эволюции (1.16) можно переписать следующим образом:

$$\Lambda(\rho) = \sum_k \langle e_k| (U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger) |e_k\rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger. \quad (1.17)$$

Операторы  $\{E_k\}$ , называемые операторами Крауса, удовлетворяют условию полноты:

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I. \quad (1.18)$$

Выражение (1.17) известно как представление операторной суммой. Этот подход удобен, так как он позволяет описывать поведение системы, не вдаваясь в детали свойств окружающей среды. Это упрощает вычисления и способствует более явному пониманию процессов, происходящих в квантовой системе.

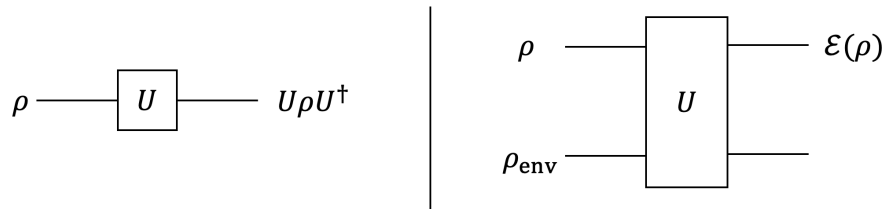


Рисунок 1.2: Модели замкнутой (слева) и открытой (справа) квантовых систем.

### 1.1.4 Матрица переноса Паули

Часто для удобства используют различные представления оператора  $\Lambda$  [65]. Одним из них является матрица переноса Паули (Pauli transfer matrix, PTM) [66]. Для этого воспользуемся представлением Паули-Лиувилля, в котором матрица плотности  $n$ -кубитной системы записывается в виде вектора  $|\rho\rangle\rangle$  длины  $d^2$ , элементами которого являются действительные коэффициенты  $\alpha_i$ :

$$\rho = \sum_{i=1}^{d^2} \alpha_i \mathcal{P}_i, \quad (1.19)$$

где операторы  $\mathcal{P}_i$  образуют базис Паули  $\{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$ . Тогда действие квантового канала может быть описано следующей матрицей:

$$(R_\Lambda)_{ij} = \frac{1}{d} \text{Tr}\{\mathcal{P}_i \Lambda(\mathcal{P}_j)\}, \quad (1.20)$$

с действительными коэффициентами  $(R_\Lambda)_{ij} \in [-1, 1]$ . В таком формализме квантовый канал реализуется как матричное умножение:

$$\Lambda(\rho) = R_\Lambda |\rho\rangle\rangle. \quad (1.21)$$

Описание данного представления квантового преобразования вынесено в отдельную главу, поскольку оно будет часто применяться в этой работе. В частности, оно используется при экспериментальном исследовании двухкубитной операции методом томографии квантового процесса, а также при моделировании эволюции матрицы плотности многокубитной системы в кодах коррекции квантовых ошибок.

## 1.2 Квантовые вычисления на сверхпроводниковых системах

### 1.2.1 Физические основы сверхпроводниковых кубитов

Сверхпроводниковые кубиты представляют собой один из наиболее перспективных подходов к реализации квантовых вычислений, так как они сочетают возможности масштабирования с высокой степенью внешнего контроля

над квантовыми состояниями. Идея использования сверхпроводниковых систем для обработки квантовой информации возникла в конце XX века в связи с открытием макроскопической квантовой когерентности в системах с переходами Джозефсона. В 1985 году Э. Дж. Леггетт (A. J. Leggett) выдвинул гипотезу о возможности квантового поведения в сверхпроводящих контурах, аналогичного поведению одиночных микроскопических частиц [67]. Позднее, в 1999 году, группа Я. Накамуры (Y. Nakamura) реализовала первый сверхпроводниковый кубит, известный как «ящик Куперовских пар», и продемонстрировала когерентные колебания между двумя квантовыми состояниями [30]. Это событие считается поворотной точкой в развитии сверхпроводниковых квантовых вычислений.

В основе сверхпроводникового кубита лежит колебательный LC-контур, состоящий из индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . В квантовом режиме электрический заряд  $Q$  и магнитный поток  $\Phi$  квантуются и являются канонически сопряженными переменными, аналогично координате и импульсу. Гамильтониан колебательного LC-контра имеет вид [68]:

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (1.22)$$

где первый член описывает электростатическую энергию конденсатора, а второй – энергию магнитного поля в индуктивности. Однако спектр такой системы является эквидистантным, что существенно затрудняет возможность избирательного управления выбранными переходами.

Чтобы нарушить гармоничность спектра и обеспечить селективное управление переходами, в колебательный контур добавляют нелинейный элемент – джозефсоновский переход, состоящий из двух сверхпроводящих контактов, разделенных тонким диэлектрическим слоем. Его нелинейная индуктивность изменяет гамильтониан следующим образом:

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} - E_J \cos \left( \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (1.23)$$

где  $E_J$  – энергия джозефсоновского перехода, а  $\Phi_0$  – квант магнитного потока. Наличие джозефсоновского перехода приводит к формированию ангармонично-

го спектра, что делает возможным точное управление выбранными переходами квантовой системы.

### 1.2.2 Кубит-флаксониум

Благодаря вариативности параметров и различному взаимному расположению элементов электрической цепи было предложено множество разнообразных типов кубитов, обладающих уникальными свойствами. Именно из-за возможности проектировать системы с практически любым заранее заданным энергетическим спектром сверхпроводниковые кубиты иногда называют искусственными атомами. Среди множества известных типов кубитов наибольшее распространение в современных квантовых вычислениях получили трансмоны и флаксониумы, которые рассматриваются в данной работе.

Кубит-трансмон, предложенный и реализованный группой Йенса Коха (Jens Koch) в 2007 году [33], стал важным шагом в развитии сверхпроводниковых квантовых вычислений. Его ключевая особенность – высокое соотношение джозефсоновской энергии к зарядовой  $E_J/E_C$ , что значительно снижает чувствительность к зарядовому шуму и позволяет существенно увеличить время когерентности по сравнению с более ранними типами кубитов. Благодаря этой особенности, а также относительно простой технологии изготовления, трансмон стал наиболее широко используемой архитектурой среди сверхпроводниковых кубитов [69]. Он лежит в основе многокубитных квантовых процессоров, разрабатываемых ведущими компаниями, такими как IBM [70] и Google [71], а также научными коллективами Китая и Швейцарии.

Для создания универсального квантового процессора, устойчивого к ошибкам, необходимо дальнейшее совершенствование используемых кубитов, в частности, повышение точности операций и увеличение времен когерентности. Точность логических операций на трансмонах ограничена их низким ангармонизмом (порядка 100 МГц). Кроме того, времена когерентности трансмонов определяются не только диэлектрическими потерями в подложке, но и потерями на границах металл–подложка и металл–воздух [72, 73], что требует изменения



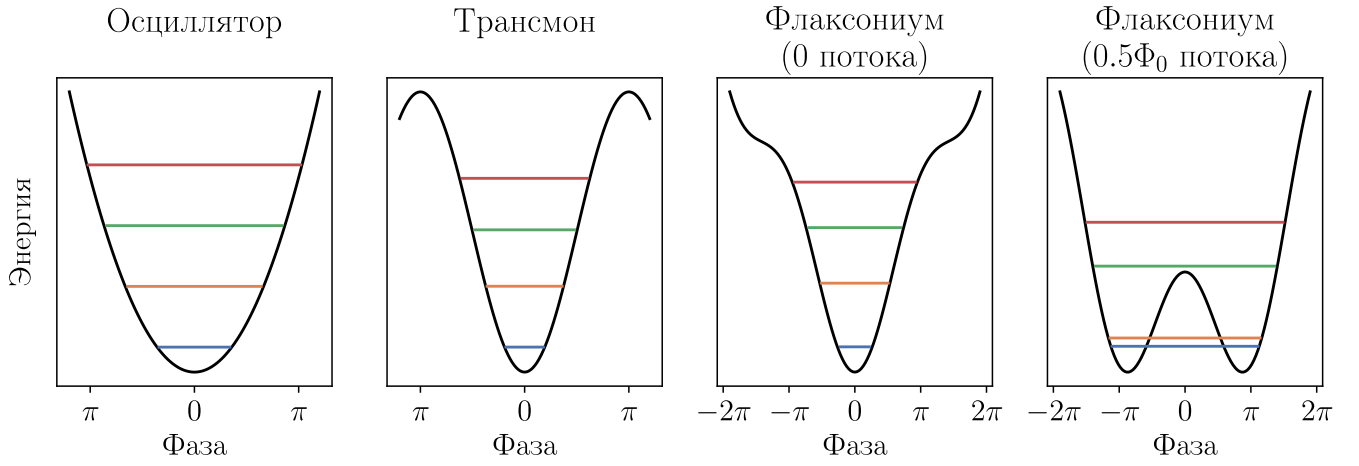


Рисунок 1.3: Сравнение энергетических спектров и формы зависимости потенциальной энергии от фазы для гармонического осциллятора, трансмона и флаксо ниума в нуле и половине кванта магнитного потока.

технологии производства чипов. Эти ограничения стимулируют поиск альтернативных типов кубитов.

Одной из наиболее перспективных альтернатив трансмону является кубит-флаксо ниум [35], обладающий высокой устойчивостью к потоковому шуму, длительными временами когерентности [74] и значительным ангармонизмом, достигающим нескольких гигагерц. Кубит-флаксо ниум представляет собой джозефсоновский контакт, шунтированный емкостью и большой кинетической индуктивностью. Такая индуктивность может быть реализована, например, с использованием массива джозефсоновских контактов [35, 75]. В результате формирования сверхпроводящего контура кубит становится восприимчивым к внешнему магнитному полю, что, в свою очередь, существенно влияет на его спектральные характеристики.

Важной особенностью кубита-флаксо ниума является сильная зависимость частоты основного перехода и ангармонизма от внешнего магнитного потока. В его основной рабочей точке, соответствующей половине кванта магнитного потока, частота кубита обычно составляет несколько сотен мегагерц, а ангармонизм достигает нескольких гигагерц. Большой ангармонизм снимает ограничение на скорость выполнения операций, что позволяет выполнять на флаксо ниумах сверхбыстрые микроволновые однокубитные операции с высокой точ-

ностью [48, 76]. Сравнение характерных энергетических спектров и формы зависимости потенциальной энергии от фазы для гармонического осциллятора, трансмона и флаксониума в нуле и половине кванта магнитного потока приведено на рисунке 1.3. В нулевом магнитном поле спектр флаксониума напоминает слабоангармоничный квантовый осциллятор, его частота составляет несколько гигагерц, а поведение близко к поведению кубита-трансмона. Это свойство играет ключевую роль в реализации микроволновых двухкубитных операций, рассматриваемых в данной работе.

Благодаря уникальным характеристикам, таким как повышенная устойчивость к шумам и высокая точность операций, флаксониум сегодня считается одним из наиболее перспективных кандидатов для создания масштабируемых квантовых вычислительных систем. Именно на флаксониумах были продемонстрированы рекордные точности как однокубитных (99.998%) [48], так и двухкубитных операций (99.94%) [49]. Разработка и совершенствование этой топологии остаются ключевым направлением исследований в области сверхпроводниковых квантовых вычислений.

### 1.2.3 Двухкубитные операции на флаксониумах: современные достижения

Высокие времена когерентности и значительный ангармонизм делают флаксониумы перспективными кандидатами для реализации высокоточных двухкубитных операций, необходимых для масштабируемых квантовых процессоров. В этом параграфе представлен краткий обзор ключевых достижений в области реализации двухкубитных операций с использованием кубитов-флаксониумов на основе ряда примечательных исследований последних лет.

В 2021 году группа В. Манучаряна предложила и экспериментально реализовала быструю двухкубитную операцию на емкостно связанных низкочастотных кубитах-флаксониумах с частотами 72.3 МГц и 136.3 МГц соответственно. Операция CZ была выполнена с помощью микроволнового импульса на частотах переходов  $|10\rangle - |20\rangle$  и  $|11\rangle - |21\rangle$ . Благодаря уникальным спектральным

свойствам низкочастотных флаксоциумов удалось достичь точности 99.2% [77].

В 2022 году коллектив под руководством Ч. Денга представил двухкубитный квантовый процессор на основе флаксоциумов с высокой когерентностью, индивидуальной адресацией и быстрыми операциями. Были продемонстрированы операции с высокой точностью: 99.97% для однокубитных и 99.72% для двухкубитных гейтов. Эти результаты показали конкурентоспособность флаксоциума по сравнению с трансмоном и подтвердили его перспективность для создания масштабируемых и устойчивых к ошибкам квантовых систем [78].

В 2022 году в группе А. Устинова предложили новый подход к реализации двухкубитных операций на флаксоциумах с использованием перестраиваемого соединительного элемента, управляемого внешним магнитным потоком, роль которого также выполнял кубит-флаксоциум. Соединительный элемент обеспечил подавление нежелательных статических ZZ- и XX-взаимодействий между кубитами, а возможность его потоковой перестройки использовалась для активации полезного взаимодействия между кубитами и выполнения двухкубитных операций. Достигнутая точность fSim и CZ гейтов составила 99.55% и 99.23% соответственно [76, 79].

В 2023 году группа У. Оливера предложила гибридную архитектуру процессора, где флаксоциумы играют роль вычислительных кубитов, а трансмон — соединительного элемента. Сильная связь между кубитами и соединительным элементом позволила практически полностью подавить нежелательное ZZ-взаимодействие, что привело к значительному обособлению частот переходов между уровнями вычислительного и невычислительного подпространств. Это позволило реализовать микроволновые операции на трёх разных переходах:  $|101\rangle - |111\rangle$ ,  $|101\rangle - |201\rangle$ ,  $|101\rangle - |102\rangle$  (на первой и третьей позиции индексов находятся состояния флаксоциумов, а на второй позиции — состояния связующего кубита-трансмона), и достичь точности CZ операций в диапазоне (99.85 – 99.92)% [45].

В 2023 году группа ученых под руководством Й. Коха и Д. Шустера спроектировала перестраиваемый соединительный элемент, индуктивно связывающий два вычислительных кубита-флаксоциума. Такая связь обеспечила низкое ZZ-

взаимодействие ( $< 3$  кГц) и перестраиваемое XX-взаимодействие в диапазоне от  $-35$  до  $75$  МГц, что позволило реализовать операции  $\sqrt{b}\text{SWAP}$  с точностью  $99.91\%$  и  $\sqrt{i}\text{SWAP}$  с точностью  $99.72\%$ . Эти результаты свидетельствуют о разнообразии и эффективности использования перестраиваемых соединительных элементов [80, 81].

В 2024 году группа В. Манучаряна продемонстрировала CNOT гейт между двумя индуктивно связанными друг с другом флаксониумами с использованием избирательного затемнения перехода. Этот метод позволил достичь точности операции  $99.94\%$ . Примечательно, что точность превышала  $99.9\%$  в течение 24 дней без перекалибровки, что подчеркивает стабильность и надежность предлагаемого метода [49, 82].

Приведенные выше исследования — лишь часть работ, направленных на использование флаксониумов в квантовых вычислениях. Стоит отметить предлагаемую группой И. Сиддики масштабируемую архитектуру квантового процессора на флаксониумах [83], а также управляемую связь между флаксониумами посредством резонатора, предложенную нидерландским коллективом [84], и достижения немецких и китайских исследователей [40, 85]. Высокий уровень этих работ демонстрирует значительный интерес к теме, что в свою очередь подчеркивает потенциал кубита-флаксониума для квантовых вычислений и мотивацию настоящей диссертации.

## 1.3 Коды коррекции квантовых ошибок

### 1.3.1 Постановка задачи

Шум и случайные ошибки возникают в любых реальных физических устройствах, как квантовых, так и классических. В классической теории информации разработано множество различных кодов коррекции ошибок, которые позволяют обнаруживать и исправлять ошибки в классических битах. Для лучшего понимания рассмотрим эти методы на примере кода повторений: одного из самых простых и интуитивных кодов коррекции ошибок в классической теории информации. Его основная идея заключается в многократном копировании ин-

формационного бита для повышения надежности хранения данных.

Пусть классический бит с вероятностью  $p$  изменяет состояние на противоположное. Чтобы увеличить вероятность сохранения исходного значения, этот бит копируется несколько раз, например, трижды, образуя кодовое слово из трёх бит. Так, если исходный бит равен 0, то кодовое слово будет 000, а если 1 — то 111. При передаче или хранении данных каждый бит может перевернуться с вероятностью  $p$ . Таким образом, код повторений защищает информацию от произвольной однокитовой ошибки. Декодирование в этом случае осуществляется по принципу большинства: принимается то значение, которое встречается чаще (например, если получено 010, то решается, что исходный бит был 0). Вероятность логической ошибки  $P_e$  складывается из вероятности переворота двух битов, равной  $3p^2(1 - p)$ , и вероятности переворота всех трёх битов, равной  $p^3$ , и в итоге определяется выражением

$$P_e = 3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3. \quad (1.24)$$

Если  $p \ll 1$ , то вероятность логической ошибки после применения кода повторений оказывается значительно меньше начальной вероятности ошибки. Более того, при копировании одного бита логической информации на пять физических битов вместо трёх код сможет защищать информацию от ошибок на двух битах, а вероятность ошибки  $P_e$  станет пропорциональной  $p^3$ , что повышает эффективность защиты от ошибок, как показано на рисунке 1.4.

Основным недостатком кода повторений является его значительная избыточность: для хранения или передачи закодированного массива данных требуется в разы большее количество физических битов, чем логических. Однако его простота и наглядность делают его полезным примером при введении в теорию коррекции квантовых ошибок. Несмотря на простоту, основная идея остаётся неизменной: добавление избыточной информации позволяет обнаруживать и исправлять ошибки.

Идея исправления ошибок в квантовой информатике была заимствована из области передачи классических данных. Однако специфика квантовой физики

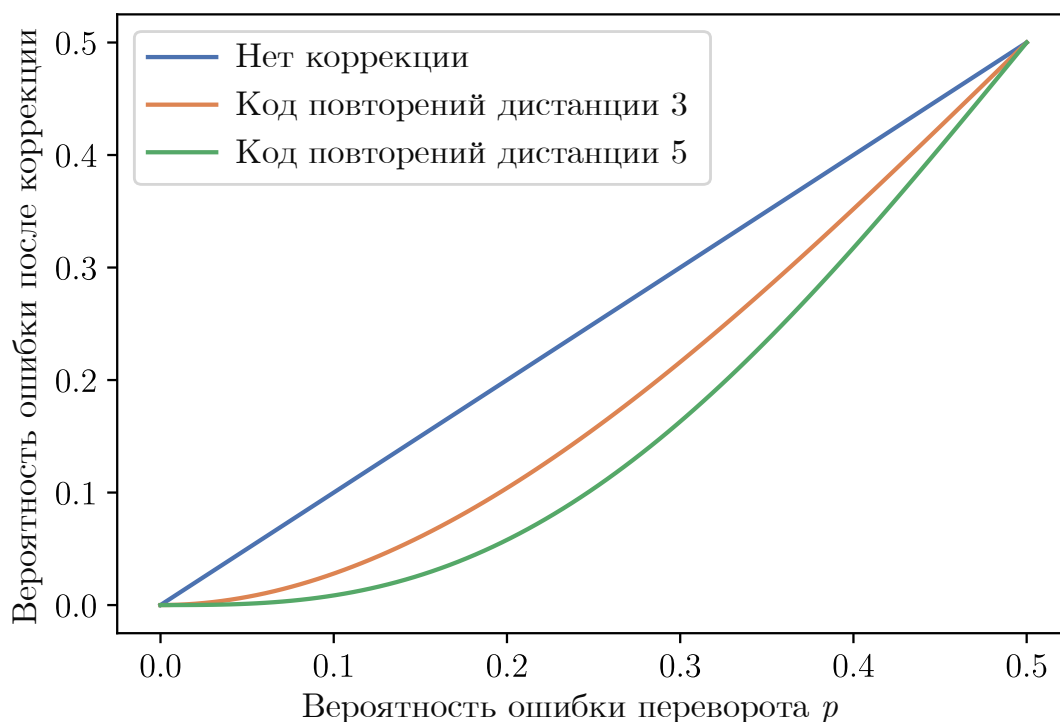


Рисунок 1.4: Зависимость вероятности логической ошибки от вероятности ошибки на одном бите  $p$  в случаях когда нет коррекции ошибок, используется код повторений на 3-х кубитах и код повторений на 5-ти кубитах.

создаёт ряд сложностей, которые не позволяют напрямую использовать методы классической теории ошибок:

1. Квантовую информацию невозможно копировать (теорема о запрете клонирования [86]), что исключает возможность создания резервного дублирующего состояния для проверки.
2. Квантовые ошибки носят непрерывный характер, и их точное определение требует бесконечной точности и неограниченных физических ресурсов.
3. Квантовые ошибки имеют различные типы, в отличие от классических, где бит может изменить своё состояние лишь одним способом.
4. Квантовая информация теряется при считывании: измерение квантового состояния обычно приводит к его проецированию на определённое собственное значение, что делает невозможным восстановление исходного состояния.

Несмотря на эти сложности, были разработаны методы для эффективного устранения квантовых ошибок. Одним из первых учёных, предложивших кон-

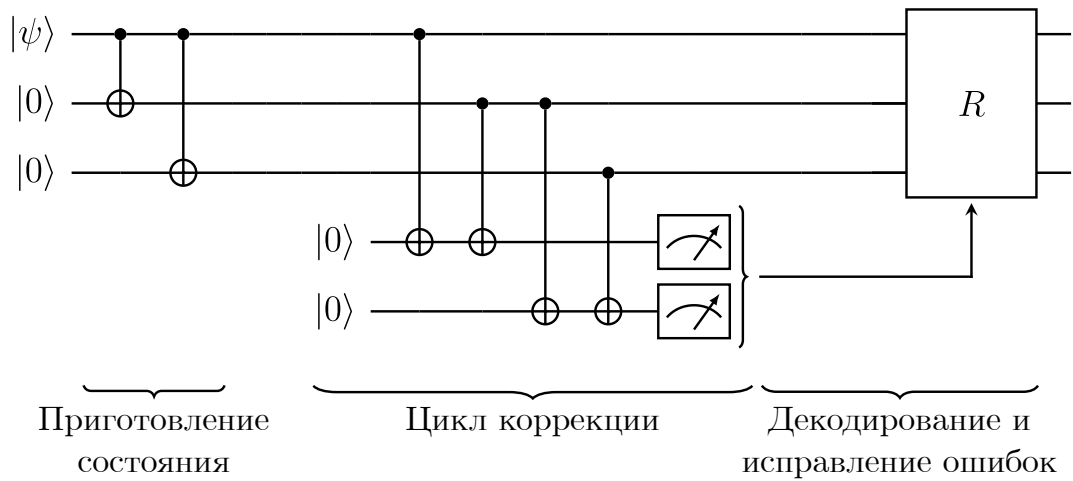


Рисунок 1.5: Квантовая схема кода повторений, состоящая из трех информационных кубитов, хранящих распределенную волновую функцию логического состояния, и двух вспомогательных кубитов, используемых для обнаружения  $X$  ошибок.

цепцию квантовой коррекции ошибок, стал Питер Шор, который в 1995 году опубликовал работу [87], описывающую методы эффективной коррекции квантовых ошибок. Во-первых, оказалось возможным дискретизировать квантовые ошибки, описывая их наборами операторов Паули, что превращает их из аналоговых в цифровые и позволяет эффективно их обнаруживать и исправлять. Во-вторых, квантовая информация не копируется на большее число физических кубитов, а кодируется в запутанном состоянии системы, что позволяет обойти запрет на клонирование квантовых состояний. Наконец, в-третьих, в таком подходе измеряются только вспомогательные кубиты, которые несут информацию лишь о произошедших в системе ошибках (а точнее — о чётности произведения проекций выбранных сочетаний физических кубитов на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), и тем самым при измерении не разрушается квантовая информация.

### 1.3.2 Квантовый код повторений

Квантовый код повторений на трёх кубитах представляет собой простейший пример кода коррекции квантовых ошибок. Его основная идея заключается в кодировании одного логического кубита в запутанное состояние трёх физиче-

ских кубитов:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L = \alpha |000\rangle + \beta |111\rangle, \quad (1.25)$$

где логические состояния определены как:

$$|0\rangle_L = |000\rangle, \quad |1\rangle_L = |111\rangle. \quad (1.26)$$

Суперпозиция состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  кодируется в соответствующую суперпозицию логических состояний  $|0\rangle_L$  и  $|1\rangle_L$ . Важно отметить, что данное кодирование не эквивалентно копированию волновой функции:

$$|\psi\rangle_L = \alpha |000\rangle + \beta |111\rangle \neq (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)^{\otimes 3}. \quad (1.27)$$

Приготовить такое состояние можно, например, с помощью двух операций CNOT, как показано на рисунке 1.5 в первой части квантовой схемы.

Процесс выявления ошибок на физических кубитах, хранящих логическое состояние, требует использования вспомогательных кубитов. Эти кубиты запутываются с основными таким образом, чтобы их измерения не разрушали логическое состояние. Эти кубиты запутываются с основными таким образом, чтобы их измерения не изменяли логическое состояние системы в случае отсутствия ошибок. Анализируя результаты измерений вспомогательных кубитов, можно определить факт и тип произошедшей ошибки, после чего применить соответствующую коррекцию. Таким образом, в отсутствие ошибок результат измерения вспомогательных кубитов равен 00, а это значит, что схема не изменяет логическое состояние. Если, например, на втором физическом кубите произойдет X ошибка, то она распространится по квантовой схеме и приведет к перевороту обоих вспомогательных кубитов. В случае ошибки на первом или третьем кубите результат измерений будет 10 и 01 соответственно. Получается, что наблюдатель, опираясь на полученные данные, может определить расположение ошибки и выполнить соответствующую операцию коррекции.

Другим словами, описанную выше процедуру можно интерпретировать так: вспомогательные кубиты служат для измерения четности произведений операторов  $Z_1 Z_2$  и  $Z_2 Z_3$ , где  $Z_i$  — оператор Паули  $Z$ , действующий на  $i$ -й кубит.



Поскольку  $X$  ошибка, произошедшая на любом из трёх кубитов, антикоммутирует с хотя бы с одним из операторов  $Z_1 Z_2$  и  $Z_2 Z_3$ , в предположении о том, что число ошибок не превышает единицу, результаты измерений этих операторов позволяют однозначно определить, произошла ли ошибка, и если да, то на каком из кубитов.

Как уже говорилось ранее, квантовые ошибки являются непрерывными. Например, на  $k$ -м физическом кубите может произойти не  $X$  ошибка, а поворот вокруг оси  $x$  на некоторый угол  $\varphi$ , описываемый унитарной матрицей

$$R_X(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

В этом случае описанный метод также позволяет определить и исправить ошибку. Если перед измерением вспомогательных кубитов волновая функция всей системы  $|\psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$  находится в суперпозиции двух состояний:

$$|\psi\rangle \longrightarrow R_X(\varphi)|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|\psi\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) X_k |\psi\rangle. \quad (1.29)$$

После добавления в систему двух вспомогательных кубитов и выполнения четырёх операций CNOT, как показано на схеме 1.5, перед измерением получаем следующее состояние пятикубитной системы в зависимости от номера кубита  $k$ :

$$\begin{cases} k = 1 : & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|\psi\rangle \otimes |00\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) X_1 |\psi\rangle \otimes |10\rangle, \\ k = 2 : & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|\psi\rangle \otimes |00\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) X_2 |\psi\rangle \otimes |11\rangle, \\ k = 3 : & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|\psi\rangle \otimes |00\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) X_3 |\psi\rangle \otimes |01\rangle. \end{cases} \quad (1.30)$$

Здесь последние два индекса волновой функции отвечают состояниям вспомогательных кубитов. После выполнения процедуры измерения с вероятностью  $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  может оказаться, что оба вспомогательных кубита спроецировались в основное состояние. Тогда состояние информационных кубитов описывается корректной волновой функцией  $|\psi\rangle$ , а ошибка исчезла. С вероятностью  $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  после измерения вспомогательных кубитов волновая функция информационных кубитов стала равной  $X_k |\psi\rangle$  и содержит ошибку. По результатам измерений вспомогательных кубитов, ошибка определяется с использованием таблицы

Результат измерения вспомогательных кубитов (синдром ошибки)	Наиболее вероятная ошибка
00	Нет
10	$X_1$
11	$X_2$
01	$X_3$

Таблица 1.1: Таблица поиска для трёхкубитного кода повторений.

поиска 1.1. Таким образом, после описанной процедуры непрерывная ошибка дискретизируется и в дальнейшем исправляется.

Для защиты от фазовых ошибок, описываемых вращением вокруг оси  $z$ , применяется аналогичный код коррекции. Здесь, вместо измерения операторов  $Z_1Z_2$  и  $Z_2Z_3$ , проводится измерения операторов  $X_1X_2$  и  $X_2X_3$ . Изменение базиса можно произвести с помощью операций Адамара, действующих на физические кубиты, как показано на рисунке 1.6.

Таким образом, квантовый код повторений на трёх кубитах демонстрирует основные принципы коррекции квантовых ошибок, а для обнаружения ошибок вспомогательные кубиты используются для измерения чётности произведения проекций информационных. Комбинируя произведения операторов Паули, можно добиться того, чтобы код исправлял произвольные  $X$ ,  $Z$  и  $Y$  ошибки ( $Y$  ошибка отвечает событию одновременного детектирования как  $X$ , так  $Z$  ошибки). А так как любая непрерывная ошибка может быть разложена в базисе Паули, то такой код может справляться с ними. Ниже принципы стабилизаторных кодов коррекции будут изложены математически.

### 1.3.3 Формализм стабилизаторов

Стабилизаторные коды являются наиболее распространенным методом защиты квантовой информации от ошибок. Эти коды используют математическую структуру группы Паули и стабилизаторов для обнаружения и исправ-

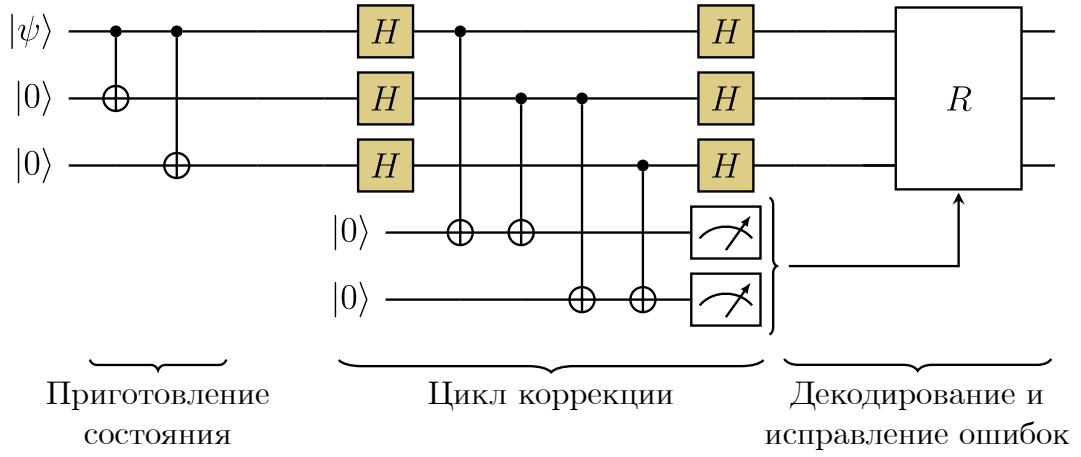


Рисунок 1.6: Квантовая схема кода повторений, состоящая из трех информационных кубитов, хранящих распределенную волновую функцию логического состояния, и двух вспомогательных кубитов. Благодаря смене базиса, выполняемой с помощью операторов Адамара, схема позволяет исправлять  $Z$  ошибки.

ления ошибок, тем самым обеспечивая надежную обработку квантовых данных [5, 88].

Группа Паули  $\mathcal{P}_n$  для  $n$  кубитов определяется как множество всевозможных тензорных произведений степени  $n$  однокубитных матриц Паули  $I$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  с множителями  $\pm 1$  и  $\pm i$  [52]. Стабилизаторный код определяется как абелева подгруппа  $\mathcal{S}$  группы  $\mathcal{P}_n$ , называемая группой стабилизаторов, где каждый элемент  $g \in \mathcal{S}$  стабилизирует кодовое пространство  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \{|\psi\rangle : g|\psi\rangle = |\psi\rangle \forall g \in \mathcal{S}\}. \quad (1.31)$$

То есть действие стабилизаторов не изменяет состояние внутри кодового пространства. Из этой идеи следует, что множество стабилизаторов, во-первых, образует группу: если операторы  $g_i$  и  $g_j$  стабилизируют  $|\psi\rangle$ , то и их произведение также стабилизирует  $|\psi\rangle$ , а во-вторых, эта группа является абелевой, так как все элементы в ней коммутируют: если  $g_i|\psi\rangle = |\psi\rangle$  и  $g_j|\psi\rangle = |\psi\rangle$ , то  $(g_i g_j - g_j g_i)|\psi\rangle = g_i g_j |\psi\rangle - g_j g_i |\psi\rangle = 0 \Rightarrow [g_i, g_j] = 0$ .

Ошибки в системе удобно раскладывать на операторы Паули, которые могут не коммутировать с некоторыми из стабилизаторов. Если ошибка  $E$  антикоммутирует с каким-либо стабилизатором  $g$ , то есть  $\{E, g\} = 0$ , то применение

$E$  к кодовому состоянию  $|\psi\rangle$  приводит к изменению знака соответствующего стабилизатора:  $g(E|\psi\rangle) = -E|\psi\rangle$ . Это изменение знака свидетельствует о наличии ошибки и фиксируется при измерении стабилизатора. Данное свойство антикоммутации позволяет эффективно обнаруживать ошибки, а совокупность значений измерений всех стабилизаторов кода для некоторой ошибки называется ее синдромом.

Важным свойством кодов коррекции является возможность выполнения логических операций. Логические кубиты кодируются в кодовом пространстве  $\mathcal{C}$ , а логические операции соответствуют унитарным преобразованиям, сохраняющим  $\mathcal{C}$ . Эти операции описываются элементами нормализатора  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$  группы стабилизаторов в  $\mathcal{P}_n$ , определяемого как  $\mathcal{N}(\mathcal{S}) = \{P \in \mathcal{P}_n \mid Pg = gP, \forall g \in \mathcal{S}\}$ . Логические операторы коммутируют со всеми стабилизаторами, благодаря чему они переводят одно кодовое состояние в другое, не изменяя стабилизаторы. Множество логических операторов  $\bar{Z}_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i$ , действующих на  $i$ -й логический кубит и рассматриваемых с точностью до элементов стабилизаторной группы, образует группу, изоморфную группе Паули на  $k$  кубитах, где  $k$  соответствует числу закодированных логических кубитов:

$$\begin{aligned} [\bar{Z}_i, \bar{Z}_j] &= 0, \\ [\bar{X}_i, \bar{X}_j] &= 0, \\ [\bar{Z}_i, \bar{X}_j] &= 0 \quad (i \neq j), \\ \{\bar{Z}_i, \bar{X}_i\} &= 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Стабилизаторный код часто характеризуется параметрами  $[n, k, d]$ , где  $n$  — число физических кубитов,  $k$  — число закодированных логических кубитов, а  $d$  — дистанция кода, определяемая как минимальный вес (число нетривиальных операторов в тензорном произведении) среди всех операторов из группы  $\mathcal{P}_n$ , переводящих одно кодовое состояние в другое. Дистанция  $d$  определяет способность кода корректировать ошибки, позволяя исправить до  $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$  ошибок.

Стандартная схема стабилизаторного кода представлена на рисунке 1.7 и включает следующие этапы:

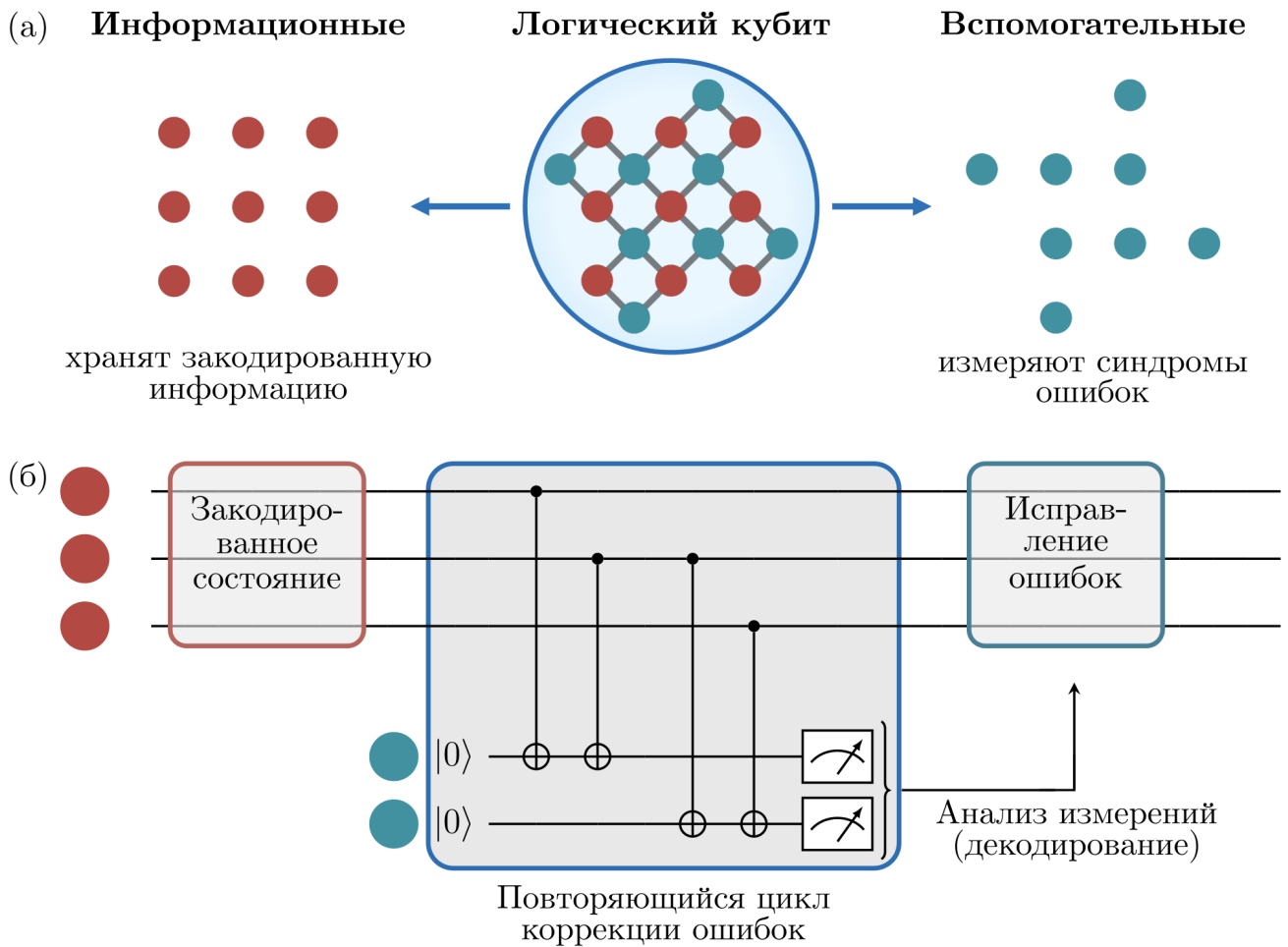


Рисунок 1.7: Принципиальная схема работы стабилизаторного кода коррекции квантовых ошибок. Логический кубит образуется физическими кубитами двух типов: информационными, которые хранят закодированную информацию, и вспомогательными, которые запутываются с информационными в ходе повторяющегося цикла коррекции и измеряют синдромы ошибок.

1. Кодирование. Начальные  $k$  логических кубитов и  $n - k$  дополнительных кубитов (инициализированных в состоянии  $|0\rangle$ ) преобразуются в запутанное состояние, принадлежащее кодовому пространству  $\mathcal{C}$ .
2. Измерение синдромов. Вспомогательные кубиты запутываются с информационными таким образом, чтобы можно было эффективно измерить собственные значения генераторов стабилизаторов. Результаты измерений (синдромы) указывают на наличие и характер ошибок.
3. Декодирование и исправление ошибок. На основе наблюдаемых синдромов с помощью некоторого алгоритма декодирования определяется, какие

ошибки могли произойти в системе, и выбирается процедура их исправления.

### 1.3.4 Пятикубитный код

Естественным вопросом, возникающим при изучении стабилизаторных кодов, является определение минимального числа кубитов  $n$ , необходимых для защиты  $k$  логических кубитов от воздействия  $t$  независимых однокубитных ошибок. Ответ на эту задачу дает квантовый аналог границы Хэмминга, который формулируется следующим образом [89]:

$$n - k \geq 2(d - 1). \quad (1.33)$$

Эта граница учитывает, что в квантовых системах ошибки могут быть не только битовыми ( $X$  ошибки), но и фазовыми ( $Z$ ) или комбинированными ( $Y$ ), поэтому для исправления ошибки требуется не только обнаружить, на каком кубите она произошла, но и определить её тип.

В случае кодирования одного логического кубита ( $k = 1$ ) с возможностью коррекции произвольной одиночной ошибки ( $t = 1, d = 3$ ) из приведённого соотношения (1.33) следует, что число кубитов данных должно удовлетворять неравенству  $n \geq 5$ . Такой пятикубитный код действительно существует и был предложен Лафламмом в 1996 году [90]. Его стабилизаторы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_0 &= ZX XZI, \\ g_1 &= IZ X XZ, \\ g_2 &= ZIZ X X, \\ g_3 &= XZIZ X. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Логические операторы, действующие на кодируемый кубит, выражаются через тензорные произведения операторов Паули:

$$\bar{X} = X^{\otimes 5}, \quad \bar{Y} = Y^{\otimes 5}, \quad \bar{Z} = Z^{\otimes 5}. \quad (1.35)$$

Эти операторы коммутируют со стабилизаторами, но не выражаются через них,

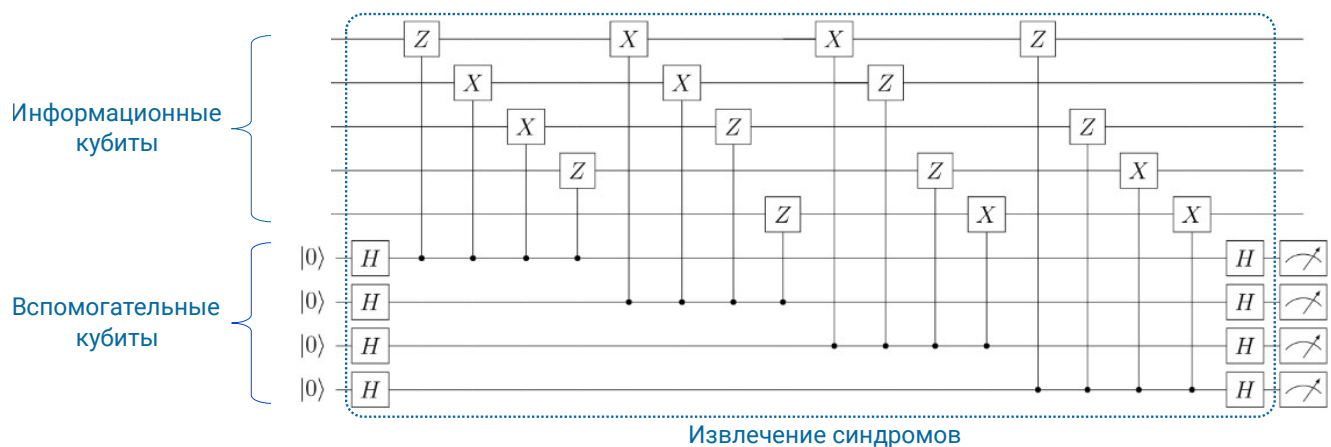


Рисунок 1.8: Схема пятикубитного кода.

что позволяет с их помощью корректно реализовывать логические операции на логическом кубите.

Оригинальная схема реализации пятикубитного кода представлена на рисунке 1.8. Она содержит 9 физических кубитов: 5 информационных, на которых хранится информация об одном логическом кубите, и 4 вспомогательных, необходимых для измерения синдромов. Несмотря на относительно сложную структуру, пятикубитный код занимает важное место в теории квантовой коррекции ошибок, являясь минимальным по числу физических кубитов кодом, способным исправлять произвольные одиночные ошибки.

### 1.3.5 Поверхностный код

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений применения на практике стабилизаторных кодов в масштабируемых квантовых системах являются поверхностные коды. Их теория была сформулирована А. Китаевым в 1997 году [91–93]. Топологически код представляет собой двумерную квадратную решётку, где узлы соответствуют физическим кубитам: информационным и вспомогательным, расположенным в шахматном порядке [94]. Каждый вспомогательный кубит, за исключением тех, что находятся на границах решётки, измеряет стабилизаторы в виде произведений операторов Паули  $ZZZZ$  или  $XXXX$  на четырёх соседних информационных кубитах, что необходимо для обнаружения ошибок.

Ключевым преимуществом поверхностных кодов является их масштабируемость и локальность синдромов. Увеличение линейных размеров решётки приводит к экспоненциальному подавлению вероятности неисправленной ошибки при сохранении локального характера взаимодействий. Например, код с расстоянием  $d = 3$ , способный исправлять одну ошибку, требует 17 физических кубитов, а код с  $d = 5$  — уже 49 кубитов. При этом число кубитов в решётке растёт квадратично с расстоянием ( $n \sim d^2$ ), но время выполнения цикла коррекции остаётся постоянным. Это обусловлено тем, что каждый вспомогательный кубит взаимодействует только с четырьмя ближайшими информационными кубитами.

Указанные свойства делают поверхностные коды основным кандидатом для реализации отказоустойчивых квантовых вычислений в современных архитектурах, в первую очередь на сверхпроводниковых процессорах, где локальность взаимодействий играет ключевую роль. Именно с использованием этого кода было экспериментально продемонстрировано экспоненциальное подавление ошибки при масштабировании кода [11], а также реализован логический кубит с временем жизни, превышающим время жизни физических кубитов, на которых он закодирован [16].

## 1.4 Выводы по главе

В данной главе изложены основные теоретические аспекты, необходимые для последующих разделов работы. Рассмотрены базовые принципы квантовых вычислений, включая математический формализм и основные операции над кубитами. Особое внимание уделено сверхпроводниковым кубитам как одному из ключевых объектов исследования данной работы, а также представлен обзор современных достижений в области двухкубитных операций с использованием кубитов-флаксоуниумов. Кроме того, описаны основы коррекции квантовых ошибок, включая основные принципы кодирования информации, формализм стабилизаторов и примеры наиболее значимых кодов. Таким образом, данная глава формирует необходимую теоретическую основу для рассмотрения экспе-



риментальной части работы, посвящённой разработке новых методов реализации двухкубитных операций, а также исследованию новых кодов коррекции квантовых ошибок.

## 2 Микроволновая двухкубитная операция CZ на флаксониумах

Реализация высокоточных двухкубитных операций является приоритетной задачей для прикладных квантовых вычислений. В данной главе рассматривается новый микроволновый метод реализации гейта CZ на кубитах-флаксониумах, связанных через дополнительный кубит-флаксониум, частота которого зависит от вычислительного состояния системы [95, 96]. Такая дисперсионная зависимость частоты соединительного кубита позволяет управляемо накапливать фазу непосредственно на выбранном вычислительном состоянии, фактически сводя двухкубитную операцию к однокубитному гейту на соединительном кубите.

Глава включает три раздела. В первом разделе изложена концепция микроволновой операции CZ, описаны её основные принципы и различные подходы к реализации, а также представлены результаты численного исследования точности гейта с экспериментально полученными параметрами системы. Второй раздел посвящён экспериментальной реализации гейта: рассматривается экспериментальная схема, приводятся параметры используемого образца и методы калибровки операции. Наконец, в третьем разделе проводится оценка точности реализованной квантовой операции методами перекрестно-энтропийного тестирования и томографии квантового процесса, а также приведен анализ ошибок, влияющих на точность выполненного гейта.

Предложенный метод открывает новые возможности для выполнения высокоточных двухкубитных операций на флаксониумных процессорах, сочетая в себе простоту, скорость и низкий уровень шума благодаря тому, что все элементы схемы остаются в своих оптимальных точках по магнитному потоку, так называемых сладких точках, на протяжении всего гейта.

## 2.1 Концепция микроволновой операции CZ

### 2.1.1 Зависимость частоты соединительного элемента от состояния вычислительных кубитов

Рассмотрим систему, состоящую из двух кубитов-флаксоунов, ёмкостно связанных друг с другом через элемент связи. В рабочей точке вычислительные кубиты расположены в точке вырождения по потоку  $0.5\Phi_0$ . Элемент связи также является кубитом-флаксоуном, его рабочее положение, соответствует нулевому потоку в контуре кубита. Схематическое расположение кубитов показано на рисунке 2.1(а). При заданном взаимном положении взаимодействие между вычислительными кубитами исключено. Гамильтониан такой системы записывается следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\text{sys}} = \sum_{i=Q_1, Q_2, C} \mathcal{H}_i + \sum_{\substack{i, j \in \{Q_1, Q_2, C\} \\ i \neq j}} g_{ij} n_i n_j, \quad (2.1)$$

где  $g_{ij}$  — коэффициент связи,  $\mathcal{H}_i$  — гамильтонианы соответствующих кубитов-флаксоунов, выполняющих вычислительную ( $Q_1, Q_2$ ) или связующую ( $C$ ) роль, а  $n_i$  — зарядовые операторы соответствующего элемента.

В данной конфигурации частота перехода  $0 - 1$  соединительного элемента зависит от состояния вычислительных кубитов. На рисунке 2.1(б) показаны характерные частотные характеристики кубитов-флаксоунов, расположенных в нуле и половине кванта магнитного потока. Числа, приведённые на графике, получены экспериментально на образце, описанном далее в разделе 2.2.1; здесь они приведены для наглядного понимания характерных масштабов. Отдельно следует отметить, что частотная ось на рисунке имеет неравномерный масштаб.

Таким образом, для такой конфигурации типично, что частота перехода  $0 - 1$  соединительного флаксоуна, находящегося в нуле магнитного потока, лежит между частотами переходов  $1 - 2$  и  $0 - 3$  вычислительных флаксоунов. Так как кубиты связаны ёмкостно, то в соответствии с теорией возмущений уровни энергии испытывают взаимное отталкивание, вследствие чего переход  $1 - 2$  смещает вверх частоту соединительного кубита, связанную с возбуждённым

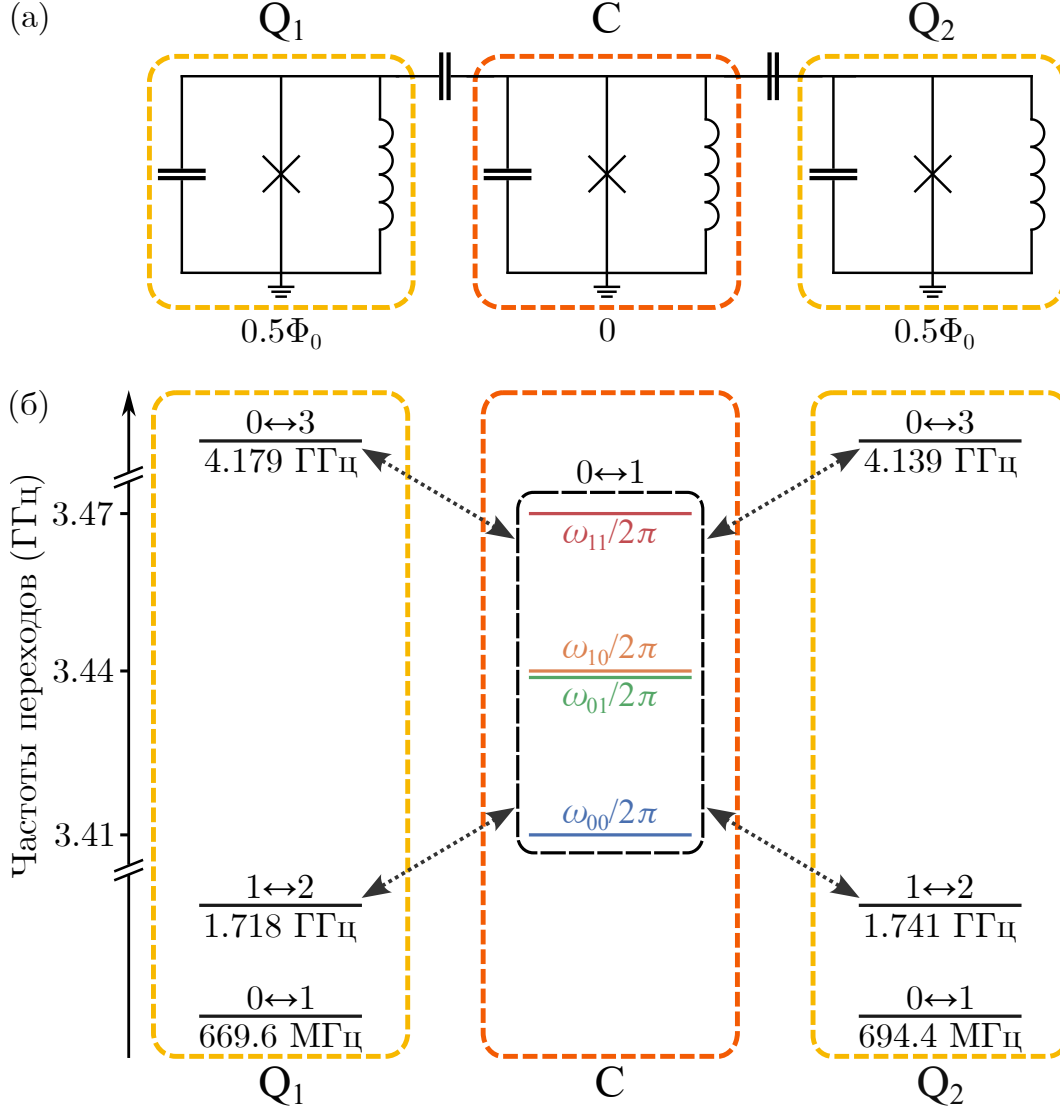


Рисунок 2.1: (а) Схематичное изображение двух вычислительных кубитов-флакониумов  $Q_1$ ,  $Q_2$ , выставленных в половину кванта магнитного потока, и емкостно связанных через элемент связи, который также представляет собой кубит-флакониум, однако расположенный в нуле магнитного потока. (б) Диаграмма энергетических уровней кубитов. Пунктирными стрелками показано взаимодействие между переходом  $0 - 1$  соединительного элемента и переходами  $1 - 2$  и  $0 - 3$  вычислительных кубитов. Это взаимодействие приводит к дисперсионному сдвигу частоты перехода  $0 - 1$  соединительного элемента в зависимости от состояния вычислительной подсистемы, как показано в выделенной черным пунктиром области синим ( $\omega_{00}$ ), зеленым ( $\omega_{01}$ ), оранжевым ( $\omega_{10}$ ) и красным ( $\omega_{11}$ ) цветами.

состоянием вычислительного кубита, а переход  $0 \rightarrow 3$  сдвигает вниз частоту соединительного кубита, связанную с основным вычислительного кубита состоянием. Таким образом, взаимодействие приводит к дисперсионному сдвигу частоты соединительного кубита: частота его перехода  $0 \rightarrow 1$  зависит от того, в каком состоянии находятся связанные с ним вычислительные кубиты. Именно эта селективность частоты перехода соединительного элемента по состоянию вычислительной подсистемы лежит в основе предлагаемого метода двухкубитной операции.

### 2.1.2 Резонансная микроволновая двухкубитная операция

В данном параграфе коротко описан основной физический принцип выполнения микроволновой операции. На рисунке 2.2(а) представлен спектр частоты перехода  $0 \rightarrow 1$  соединительного элемента в зависимости от состояния вычислительных кубитов. Если на соединительный элемент подать внешний микроволновый импульс, вызывающий одну полную осцилляцию Раби на переходе, связанном с вычислительным состоянием  $|11\rangle$ , и не влияющий на остальные переходы системы, то эффективно выполнится операция CZ.

Принцип работы такой операции аналогичен параметрической реализации CZ гейта, основанной на переходе между состояниями  $|11\rangle \rightarrow |20\rangle$  вычислительных кубитов [97]. Однако в данном случае в качестве вспомогательного энергетического уровня, выходящего за пределы вычислительного подпространства, используется первый возбуждённый уровень соединительного элемента, что позволяет обеспечить накопление условной фазы.

Действительно, рассмотрим двухуровневую подсистему, соответствующую переходу  $|110\rangle \rightarrow |111\rangle$  (первые два индекса отвечают за вычислительное состояние, а последний за состояние связующего элемента), под действием внешнего сигнала. В приближении вращающейся волны ее гамильтониан принимает вид:

$$\mathcal{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega(t) \\ \Omega^*(t) & \Delta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\Delta$  — отстройка, а  $\Omega(t)$  — огибающая колебательного сигнала. Решение

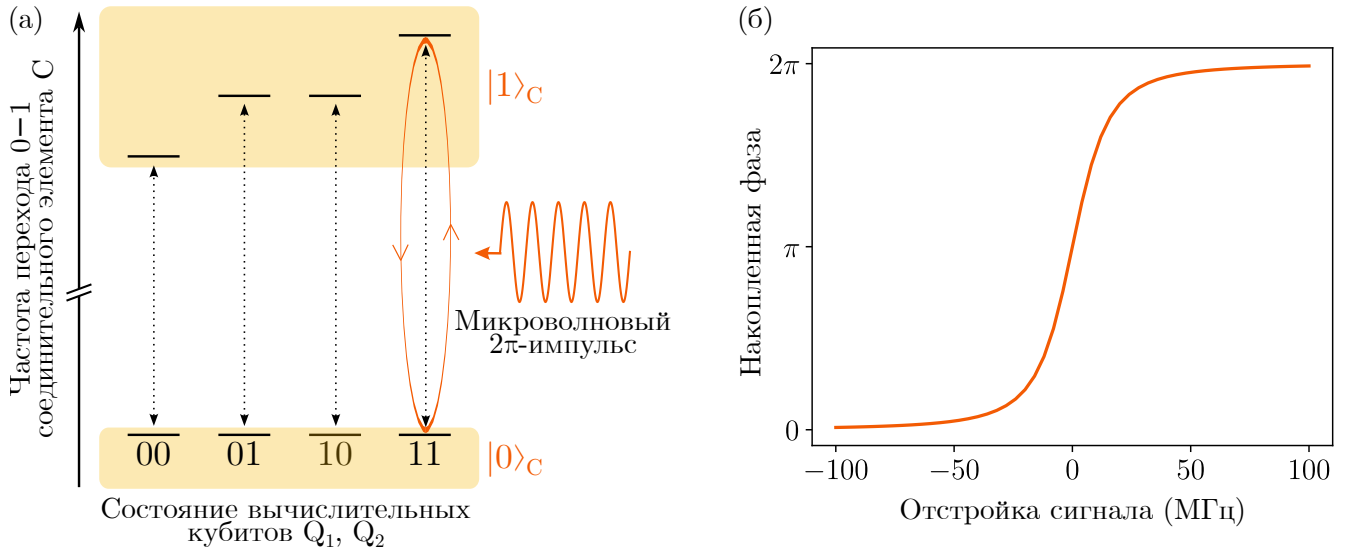


Рисунок 2.2: (а) Идея резонансной микроволновой операции. Зависимость частоты перехода 0 – 1 соединительного элемента от вычислительного состояния системы. Микроволновый  $2\pi$ -импульс вызывает одну осцилляцию Раби соединительного элемента на переходе 0 – 1, связанном с вычислительным состоянием  $|11\rangle$ , и накручивает на этом состоянии фазу  $\pi$  относительно остальных вычислительных уровней системы (б) График зависимости общей фазы, накапливаемой в двухуровневой подсистеме под воздействием микроволнового  $2\pi$ -импульса относительно других состояний системы, от отстройки по частоте возбуждающего сигнала.

уравнения Шрёдингера для сигнала прямоугольной формы и начального условия  $\psi(0) = |0\rangle$  записывается как:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\Delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \\ -\frac{2ig}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega^2}$  — обобщённая частота Раби.

Общая фаза, накопившаяся в рассматриваемой подсистеме по отношению к остальным переходам всей системы, определяется выражением  $\Delta \cdot t/2$ . График зависимости этой фазы от отстройки сигнала по частоте показан на рисунке 2.2(б). Видно, что в резонансе накопленная фаза равна  $\pi$ , что соответствует CZ гейту. Более того, отстраивая сигнал по частоте от резонанса подобным образом можно выполнить операцию CPhase с переменной управляемой фазой в

широком диапазоне.

Главным ограничением рассматриваемой операции является то, что сигнал не должен затрагивать оставшиеся переходы системы. Это означает, что сигнал должен быть небольшой амплитуды, а значит большой длительности. Так согласно численному расчету для полученных экспериментальных параметров системы длительность микроволновой операции точности 99.9% должна составлять порядка 300 нс. При этом не учитываются процессы затухания и дефазировки системы. Чтобы сократить время операции целесообразно использовать импульс с огибающей гауссовой формы, обладающий более узким фурье-образом по сравнению с прямоугольным импульсом. Выполнив численную симуляцию уравнения Шредингера, взяв в качестве огибающей возбуждающего сигнала функцию Гаусса, был получен двухкубитный гейт с точностью 99.9%, имеющий длительность всего 104 нс.

### 2.1.3 Околорезонансная микроволновая двухкубитная операция

Прежде чем перейти к описанию околорезонансной микроволновой двухкубитной операции сформулируем два условия, характеризующие корректное выполнение гейта CZ. Во-первых, после завершения выполнения операции населённость соединительного элемента должна оказаться в основном состоянии, так как это необходимо для корректных последующих операций. Вторым условием является эффективное накопление условной фазы  $\theta$  равной  $\pi$ , которое, строго говоря, записывается в виде:

$$\theta = \varphi_{00} - \varphi_{10} - \varphi_{01} + \varphi_{11} = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Для упрощения рассуждений допустим, что частоты переходов  $0 - 1$  соединительного элемента, связанные с состояниями  $|01\rangle$  и  $|10\rangle$  вычислительных кубитов равны:  $\omega_{10} = \omega_{01} = (\omega_{11} + \omega_{00})/2$ . В таком случае оба вышеупомянутых условия можно выполнить точно, и операция CZ может быть эффективно выполнена с помощью прямоугольного импульса на полусумме частот  $\omega_{00}$  и  $\omega_{10}$  как это показано на рисунке 2.3(а). При этом частота сигнала  $\omega_d = (\omega_{10} + \omega_{00})/2$ ,

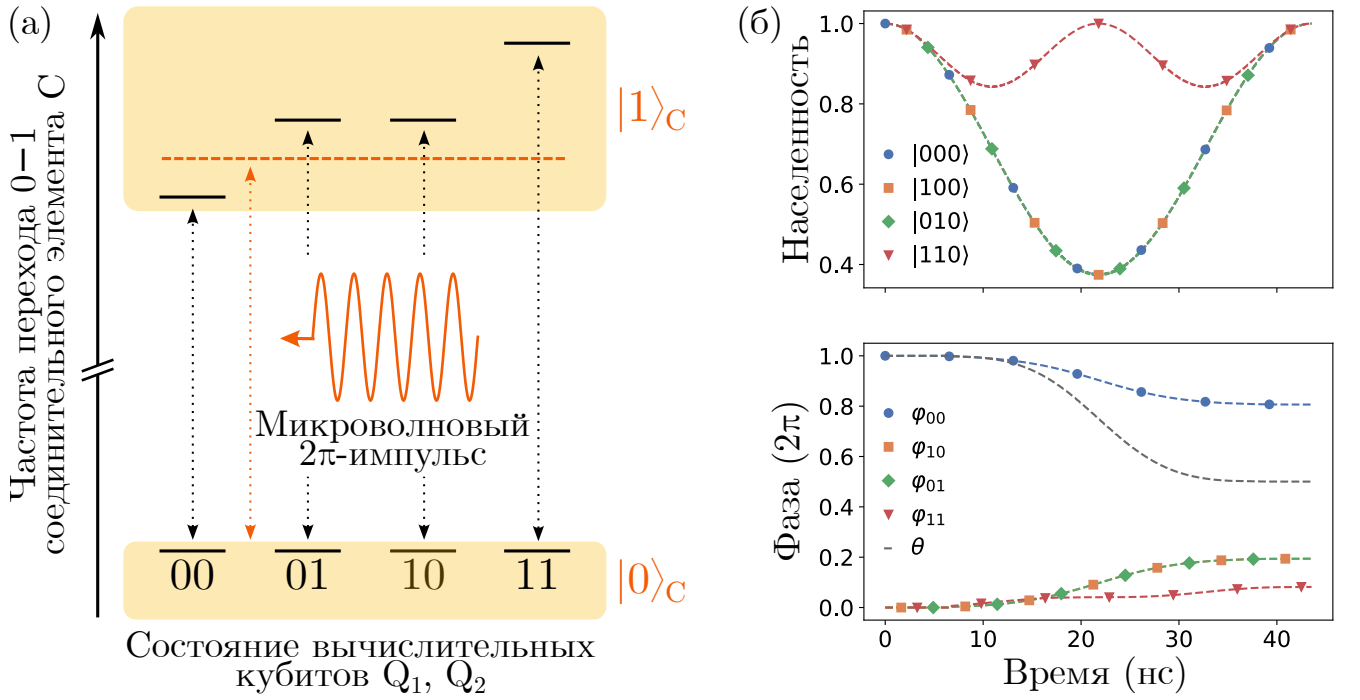


Рисунок 2.3: Околорезонансная микроволновая операция CZ. (а)

Схематическое изображение переходов 0 – 1 соединительного элемента в зависимости от вычислительного состояния системы. Микроволновый импульс подается на полусумме частот соединительного элемента, связанного с состояниями  $|00\rangle$  и  $|01\rangle$  вычислительных кубитов  $Q_1, Q_2$  и возбуждает по одной осцилляции Раби соединительного элемента на переходе 0 – 1, связанным с вычислительными состояниями  $|00\rangle, |01\rangle$  и  $|10\rangle$ , и две осцилляции на переходе, связанном с состоянием  $|11\rangle$ , как показано на графике на панели (б). Накопление фазы со временем изображено на нижнем графике, а эффективная фаза двухкубитной операции показана пунктирной линией.

амплитуда  $\Omega = \sqrt{\frac{5}{12}}(\omega_{10} - \omega_{00})$  и длительность  $\tau = \frac{\sqrt{6}\pi}{\omega_{10} - \omega_{00}}$  полностью определяются частотными характеристиками системы. Такой сигнал обеспечивает одну осцилляцию Раби для вычислительных состояний  $|00\rangle, |01\rangle$  и  $|10\rangle$  и две осцилляции для состояния  $|11\rangle$ . При этом полностью выполняется соотношение (2.4) для накопленных на каждом из четырех состояний фаз. Временная эволюция населённостей четырёх вычислительных состояний и накопленных на них фаз под действием описанного сигнала представлена на рисунке 2.3(б).

Экспериментально частоты  $\omega_{10}$  и  $\omega_{01}$  могут отличаться. Было выполнено



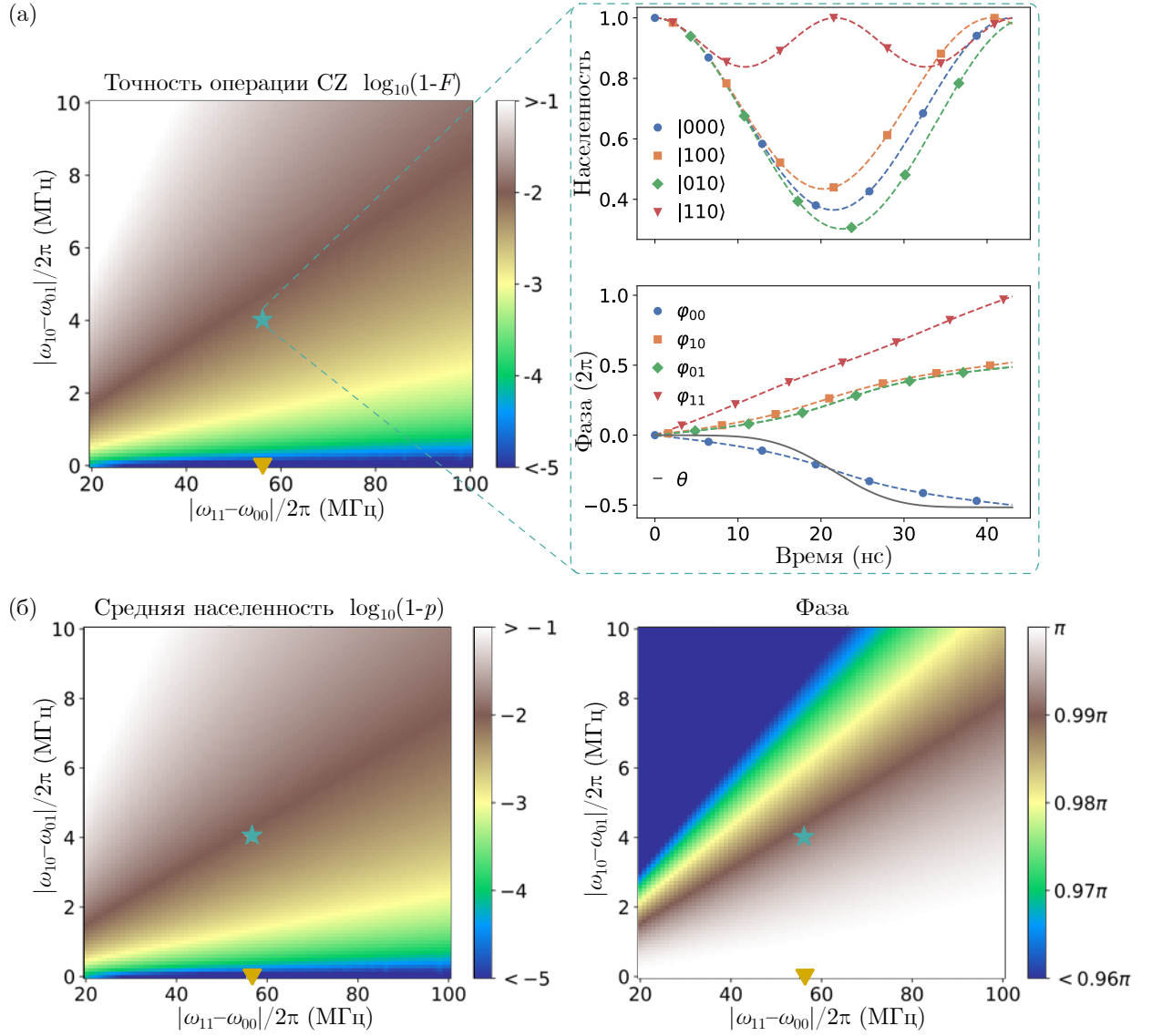


Рисунок 2.4: Численное моделирование околорезонансной двухкубитной операции. (а) Зависимость точности  $F$  гейта CZ, от разности частот соединительного элемента  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{01}$  и  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{00}$ . Оранжевый треугольник соответствует идеальному случаю  $\omega_{10} = \omega_{01}$ , при этом траектории системы показаны на рисунке 2.3(б). Бирюзовая звезда соответствует частотам, наблюдаемым в эксперименте (см. Таблицу 2.2). На вставке справа показана эволюция населенностей и фаз четырех вычислительных состояний. Серая линия отображает эффективную фазу CZ гейта, вычисленную по формуле  $\theta = \varphi_{00} - \varphi_{10} - \varphi_{01} + \varphi_{11}$ . Для полученных в эксперименте частот точность исследуемой операции CZ составила 0.992. (б) Средняя населенность  $\log_{10}(1 - \bar{p})$  и эффективная фаза  $\theta$  гейта CZ в зависимости от разности частот переходов соединительного элемента.

численное моделирование двухкубитной операции в системе при различных значениях разности частот  $|\omega_{11} - \omega_{00}|$  и  $|\omega_{10} - \omega_{01}|$  под действием управляющего сигнала с частотой  $\omega_d = \frac{\omega_{11} + 3\omega_{00}}{4}$ , амплитудой  $\Omega = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}(\omega_{11} - \omega_{00})$  и длительностью  $\tau = \frac{2\sqrt{6}\pi}{\omega_{11} - \omega_{00}}$ . На рисунке 2.4(а) показана полученная точность двухкубитной операции в зависимости от выбранных частотных параметров. Оранжевым треугольником выделена точка, соответствующая идеальному случаю с точностью операции 1. Траектории населенности и фазы каждого состояния показаны на рисунке 2.3(б). Бирюзовая звезда на графике указывает точку, отвечающую экспериментальным данным, соответствующие траектории населенностей и фаз каждого вычислительного состояния представлены на вставке справа. Точность операции CZ при экспериментальных частотах составила 0.992, а длительность — всего 43 нс.

Кроме того на рисунке 2.4(б) показаны средняя населенность четырёх начальных состояний и накопленная фаза  $\theta$ , рассчитанная для вычислительных состояний  $|000\rangle$ ,  $|100\rangle$ ,  $|010\rangle$ ,  $|110\rangle$ . Эти данные позволяют оценить ошибку утечки из вычислительного подпространства (по окончании операции соединительный элемент остается возбужденным — первое условие выполнения двухкубитной операции) и фазовую ошибку (условие (2.4) не выполняется).

## 2.2 Экспериментальная реализация

### 2.2.1 Описание двухкубитного образца

Исследуемый экспериментальный образец был первоначально разработан для демонстрации двухкубитного взаимодействия между кубитами-флаксонами с использованием перестраиваемой связи [79]. В рамках этого проекта было одновременно изготовлено несколько образцов в одном производственном цикле. На одном из них в 2021 году была успешно реализована изначальная концепция, и продемонстрирован двухкубитный CZ-гейт с точностью 99.22% и длительностью 183 нс [76]. На другом образце впоследствии был поставлен новый эксперимент, который описывается в рамках данной диссертационной работы.

Параметр	Кубит Q1	Кубит Q2	Элемент связи C
$E_C$ (ГГц)	0.55	0.55	0.584
$E_L$ (ГГц)	0.7507	0.7507	0.817
$E_J$ (ГГц)	1.8	1.9	2.457
$f_{01}$ (ГГц)	0.6696	0.6944	3.4098
$T_1$ (мкс)	15.8	22.0	—
$T_2$ (мкс)	4.5	5.8	—
$\omega_r/2\pi$ (ГГц)	7.1699	7.3813	—
$\kappa_r/2\pi$ (ГГц)	8.656	6.954	—
$\chi_r/2\pi$ (ГГц)	0.131	0.162	—

Таблица 2.1: Сводная таблица параметров исследуемого образца.

Чертеж двухкубитного образца был сделан Ильей Москаленко и Ильей Бесединым. Изготовление осуществлялось сотрудниками технологического центра НОЦ ФМН при МГТУ им. Баумана Дмитрием Москалевым, Анастасией Пищимовой, Никитой Смирновым и Евгением Зикий под руководством Ильи Родионова.

Идея реализации двухкубитной операции через подачу микроволнового возбуждения на соединительный элемент возникла в 2022 году. Было решено использовать уже существующий образец, параметры которого оказались подходящими для данной реализации. Поэтому в этой диссертации не будет детального описания архитектуры и технологии изготовления квантового процессора; акцент будет сделан на характеристиках, важных для обсуждения микроволнового гейта.

Исследуемый двухкубитный квантовый процессор изображен на рисунке 2.5. Он состоит из трех емкостно связанных кубитов-флаксоoniumов, два из которых являются вычислительными кубитами (Q1, Q2), а третий используется в качестве соединительного элемента (C). Вычислительные кубиты Q1 и Q2 емкостно связаны с индивидуальными считывающими резонаторами R1 и R2, которые в свою очередь соединены со считывающей линией. Оба кубита емкостно связаны

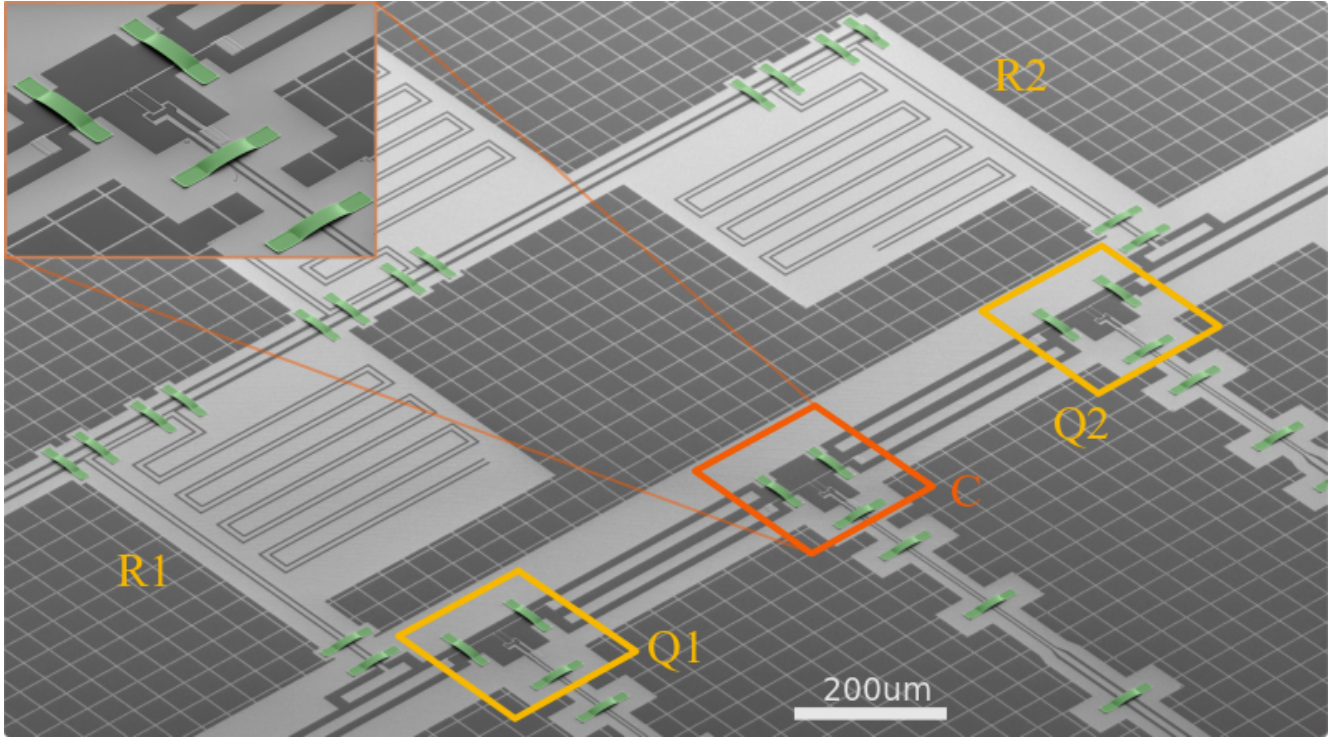


Рисунок 2.5: Изображение двухкубитного квантового устройства на основе кубитов-флаксоניумов, полученное методом сканирующей электронной микроскопии. Вычислительные кубиты Q1 и Q2 емкостно связаны с индивидуальными считывающими резонаторами R1 и R2, которые, в свою очередь, подключены к считывающей линии. Оба кубита также емкостно связаны с центральным кубитом-флаксониумом C, который выполняет роль соединительного элемента. Его увеличенное изображение показано в верхнем левом углу. Каждый флаксониум имеет индивидуальную линию управления потока.

с соединительным кубитом (C), увеличенное изображение которого приведено в левом верхнем углу рисунка 2.5.

С использованием данных, полученных в ходе анализа другого образца, определяются значения параметров  $E_C$ ,  $E_L$ ,  $E_J$  вычислительных кубитов и соединительного элемента. Параметры устройства представлены в таблице 2.1. Приведены основные частоты переходов  $f_{01}$  для каждого элемента, а также времена когерентности, измеренные с помощью стандартных экспериментов по затуханию и Рамзи, частоты считывающих резонаторов и соответствующие значения дисперсионного сдвига  $\chi_r$  и коэффициента затухания  $\kappa_r$ . [61]

В исходном положении вычислительные кубиты находятся в точке вырождения по потоку, соответствующей половине кванта магнитного потока, в то время как соединительный кубит расположен в нуле по потоку. В рабочей точке частоты вычислительных кубитов составляют 669,6 МГц и 694,4 МГц, тогда как частота соединительного элемента примерно равна 3,4 ГГц. При таком взаимном расположении остаточные эффективные ZZ- и XX-взаимодействия между вычислительными кубитами являются слабыми и составляют -10 кГц и 500 кГц соответственно.

Сильное поперечное взаимодействие между вычислительными флаксониумами и соединительным кубитом приводит к дисперсионному изменению частот всех элементов. В частности, наблюдается гибридизация первого возбужденного состояния соединительного элемента с высокоэнергетическими уровнями флаксониумов. Схематично итоговый спектр перехода  $0 \rightarrow 1$  соединительного элемента в зависимости от состояния вычислительных кубитов представлен на рисунке 2.1.

Эффективный гамильтониан такой системы, учитывающий первые два энергетических уровня каждого кубита, в присутствии микроволнового возмущения на частоте близкой к переходу между основным и возбужденным состояниями связующего кубита может быть записан следующим образом:

$$\frac{\mathcal{H}}{\hbar} = - \sum_{i=1,2,c} \frac{\omega_i}{2} \sigma_{zi} - \sum_{i=1,2} \frac{\zeta_{ic}}{4} \sigma_{zi} \sigma_{zc} + \Omega \sigma_{xc} \cos \omega_d t, \quad (2.5)$$

где  $\omega_i/2\pi$  – эффективная частота  $i$ -го кубита,  $\zeta_{ic}$  – сила связи между вычислительными кубитами и соединительным элементом,  $\sigma_{xi}$  и  $\sigma_{zi}$  – это операторы Паули, действующие на двух нижних уровнях  $i$ -го флаксониума, а  $\Omega$  – амплитуда возбуждающего сигнала на частоте  $\omega_d$ . Нижними индексами 1, 2 обозначены переменные, относящиеся к кубитам, а индексом  $c$  – к соединительному элементу.

## 2.2.2 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 2.6. Эксперимент проводился в криостате растворения BlueFors LD-250 с базовой темпера-

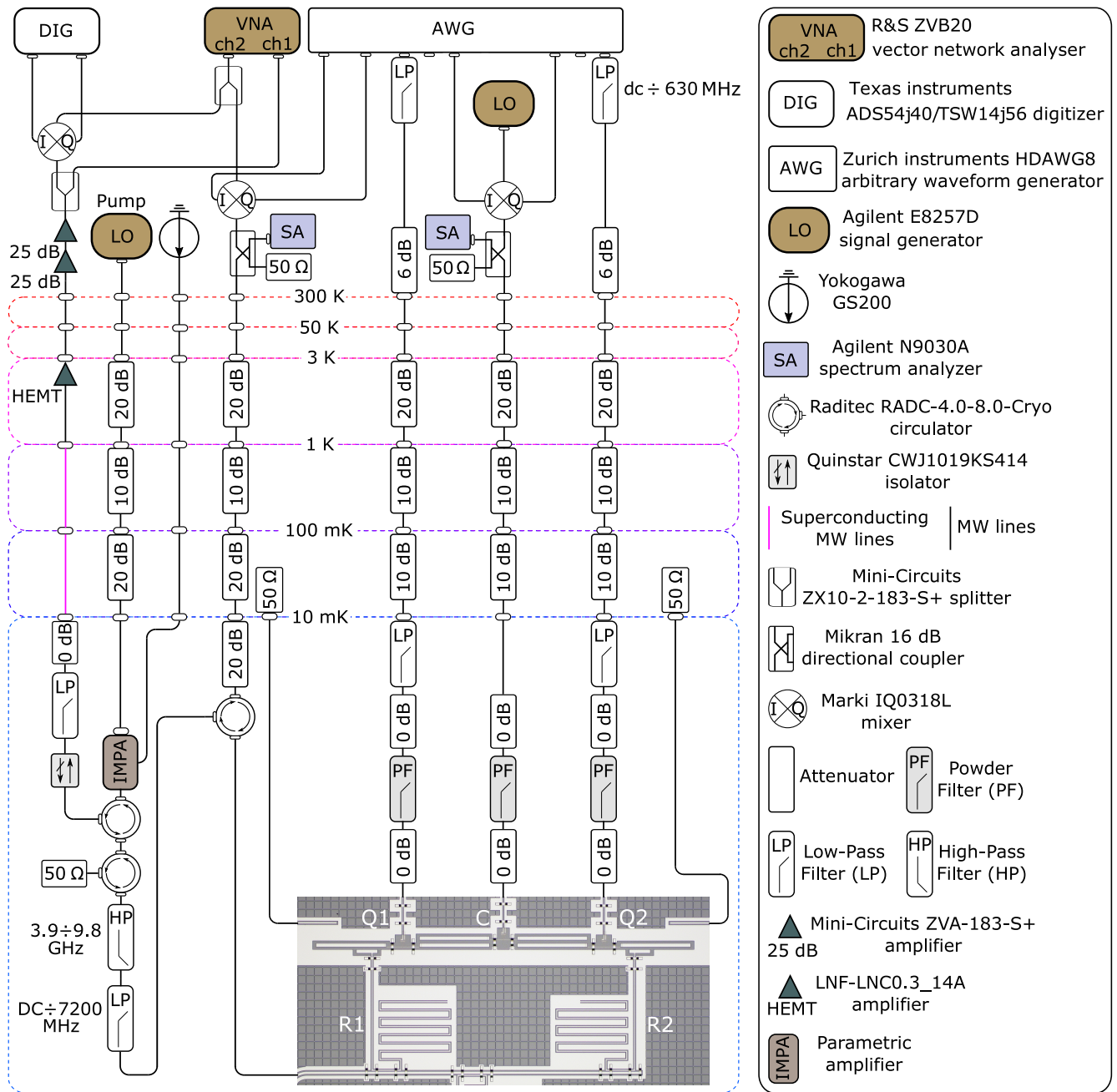


Рисунок 2.6: Схема экспериментальной установки.

турой 10 мК. Чип был подключен к управляющей системе с помощью шести линий: линии считывания, двух линий возбуждения и управления потоком (для контроля однокубитных вращений), двух линий, соединенных со ступенью 10 мК и заканчивающихся нагрузкой 50 Ом, используемой для инициализации кубитов, а также линии возбуждения и управления потоком соединительного элемента.

Генерация импульсов и управление потоком на вычислительных кубитах выполняется с помощью генератора сигналов произвольной формы Zurich Instruments HDAWG8. Для повышения частоты управляющего микроволнового сигнала на элементе связи и считывающих импульсов использовался квадратурный смеситель Marki IQ0318L. После отражения считываемый микроволновый сигнал обрабатывается специально разработанным аналого-цифровым преобразователем для импульсных измерений или векторным анализатором цепей R&S ZVB20 для спектроскопии. Для калибровки смесителей используется спектральный анализатор Agilent N9030A.

Микроволновые аттенюаторы применяются для подавления теплового и приборного шума от генераторов сигнала, работающих при комнатной температуре. Линия считывания проходит через параметрический усилитель IMPA, за которым установлен изолятор Quinstar CWJ1019KS414. Для накачки параметрического усилителя используется генератор сигналов Agilent E8257D. Три циркулятора Raditec RADC-4.0-8.0-Cryo и набор фильтров нижних и верхних частот, установленные после образца, предотвращают нежелательное воздействие накачки IMPA и отраженного сигнала на элементы схемы. На ступени PT2 (3 К) криостата установлен усилитель на основе транзистора с высокой подвижностью электронов (HEMT) LNF-LNC0.3-14A. Линия на выходе из криостата дополнительно усиливается с помощью двух усилителей Mini-Circuits ZVA-183-S+.

В линиях управления кубитами используются фильтры нижних частот Mini Circuits VLF-630+ в сочетании с порошковыми фильтрами с аттенюацией 15 дБ, соответствующими частотам кубитов, а в линии управления соединительным элементом применяется только порошковый фильтр.

### 2.2.3 Базовые однокубитные операции

В этом параграфе кратко изложены методы выполнения базовых однокубитных операций: инициализации, однокубитных гейтов и считывания [96]. Эти процедуры не представляют собой новшество непосредственно данной работы, но их описание необходимо для понимания оригинальных методов калибровки и исследования предлагаемой двухкубитной операции.

Один из наиболее распространенных способов инициализации сверхпроводниковых кубитов является пассивная инициализация. Перед началом работы с кубитом следует выдержать паузу, значительно превышающую время жизни  $T_1$  кубита, чтобы кубит релаксировал в термическое состояние. Такой метод подходит для высокочастотных кубитов, у которых частота перехода  $0 \rightarrow 1$  соответствует температуре в несколько кельвин, а их время релаксации сопоставимо с длительностью одиночного эксперимента.

Для низкочастотных кубитов, таких как флаксоны, пассивная инициализация оказывается неэффективной. В рабочей точке низкая частота соответствует температуре около 40 мК ( $\hbar\omega_{01} \sim k_B T$ ), что лишь ненамного превышает температуру окружения. В таких условиях равновесное термализованное состояние обладает сравнительно большой заселенностью и не может рассматриваться как чистое. Таким образом, ожидание релаксации кубита до теплового равновесия с окружением оказывается недостаточным для качественной инициализации.

Используемый в рассматриваемом эксперименте механизм инициализации основан на применении быстроперестраиваемых потоковых импульсов, подаваемых в линию контроля потока с помощью генератора импульсов произвольной формы. Для этого каждый кубит помимо индивидуальной линии контроля обладает емкостно связанной антенной – дополнительной линией, заканчивающейся нагрузкой  $50 \Omega$ , релаксация в которую описывается золотым правилом Ферми и пропорциональна частоте кубита и квадрату матричного элемента зарядового оператора  $|\langle 0 | \hat{n} | 1 \rangle|^2$ . Характерные для кубита-флаксона зависимости частоты и зарядового элемента от потока приведены на рисунке 2.7(а,



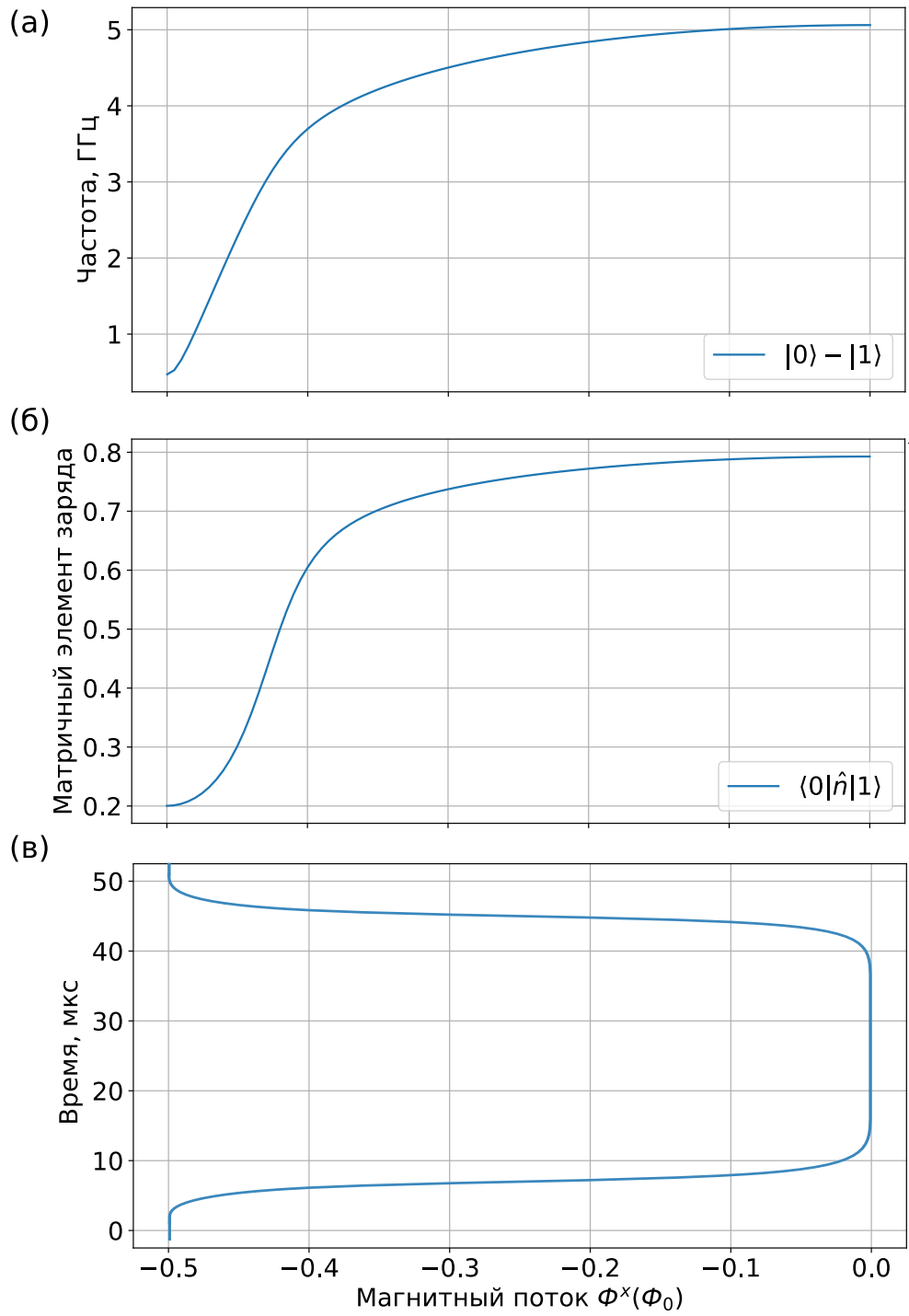


Рисунок 2.7: Механизм инициализации флаксоинума. Характерная для кубитов-флаксоинумов зависимость (а) частоты перехода  $0 - 1$  и (б) матричного элемента зарядового оператора  $|\langle 0|\hat{n}|1\rangle|^2$  от внешнего магнитного потока. (в) Вид инициализирующего импульса, подаваемого на кубит-флаксоинум.

б). Поэтому для инициализации состояния можно перестроить частоту кубита в гигагерцовый диапазон, где тепловой населенностью можно пренебречь, а скорость релаксации существенно увеличена. Таким образом, для пассивной инициализации кубитов могут быть использованы быстрые адиабатические импульсы, которые переводят кубит из точки вырождения в верхнюю рабочую точку, как показано на рисунке 2.7(в).

Базовым однокубитным гейтом является вращение на угол  $\pi/2$  вокруг выбранной оси в экваториальной плоскости сферы Блоха, реализуемое путем подачи гауссового импульса на частоте перехода  $0 - 1$  соответствующего кубита длительностью 13.3 нс. Импульсы возбуждения подаются через индивидуальную потоковую линию управления кубитом. Из-за большой амплитуды этих импульсов мы применяем компенсацию фазовой ошибки виртуальным вращением вокруг оси  $z$  после каждого импульса  $\pi/2$  [61]. С помощью произвольных вращений вокруг оси  $z$  и  $\pi/2$  импульса можно выполнить произвольную однокубитную операцию [52].

Дисперсионное считывание кубитов-флакониумов осуществляется с использованием индивидуальных планарных резонаторов [31, 32]. Точности считывания для используемого образца равны 0.67 и 0.62 для первого и второго кубитов соответственно. Такие относительно низкие точности считывания объясняются слабой силой связи между кубитами и считывающими резонаторами, что является врожденной особенностью схемы.

#### 2.2.4 Метод считывания соединительного элемента

Перед тем как перейти непосредственно к реализации гейта CZ, важно описать метод считывания состояний соединительного элемента. В отличие от вычислительных кубитов, соединительный кубит не имеет индивидуального резонатора для считывания, что делает эту задачу более сложной. Для решения этой проблемы мы используем тот факт, что частота вычислительных кубитов зависит от состояния соединительного элемента. По сути, это то же эффект, который используется для реализации микроволновой двухкубитной операции.

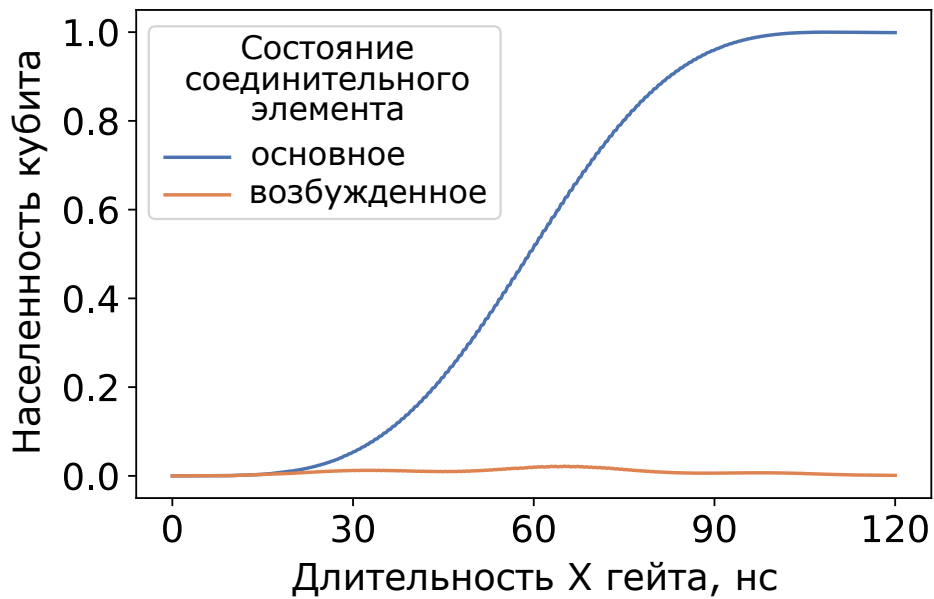


Рисунок 2.8: Динамики вычислительного кубита Q1 под действием импульса, откалиброванного при невозбужденном соединительном элементе, для двух различных состояниях соединительного элемента: основного (синяя кривая) и возбужденного (оранжевая кривая).

Действительно, сильное взаимодействие между соединительным элементом и вычислительным кубитом приводит к значительному дисперсионному смещению частоты кубита, обусловленному состоянием соединительного элемента, которое, согласно численным расчетам, составляет порядка 26 МГц. Это означает, что сигнал, настроенный на частоту кубита, когда соединительный элемент находится в основном состоянии, будет по-разному воздействовать на динамику кубита в зависимости от состояния соединительного элемента. Особенно заметно это различие при использовании сигналов с низкой амплитудой.

В качестве такого импульса был выбран  $\pi$ -импульс гауссовой формы с длительностью 120 нс. На рисунке 2.8 представлено численное моделирование динамики вычислительного кубита под действием этого импульса при двух состояниях соединительного элемента: основном (синяя кривая) и возбужденном (оранжевая кривая). Как видно, длинный импульс практически не влияет на кубит, когда соединительный элемент возбужден, в то время как для невозбужденного соединительного элемента он действует как гейт X.

Таким образом, для считывания состояния соединительного элемента на первый вычислительный кубит подавался длинный  $\pi$ -импульс, и если населенность кубита под его воздействием не изменялась, то это означает, что соединительный элемент возбужден.

### 2.2.5 Измерение частотных характеристик соединительного элемента

Калибровка гейта CZ начинается с определения частот переходов  $\omega_{mn}$  соединительного элемента для четырех различных состояний вычислительных кубитов  $|mn\rangle \in \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Для этого используется измерительный протокол, представленный на рисунке 2.9. Сначала кубиты подготавливаются в одном из этих четырех состояний, затем на соединительный элемент подается возбуждающий импульс с варьируемой амплитудой и длительностью. Перед считыванием состояния первого вычислительного кубита выполняется операция  $X$  длительностью 120 нс, позволяющая определить состояние соединительного элемента.

Зависимость населенности считываемого кубита от начального состояния вычислительных кубитов и параметров возбуждающего сигнала, подаваемого на соединительный элемент, представлена на рисунке 2.9. Частоты осцилляций, полученные для каждого значения частоты сигнала, аппроксимированы зависимостью  $\sqrt{\Omega^2 + \Delta_{mn}^2}$ , где  $\Omega$  — частота возбуждающего импульса, а  $\Delta_{mn} = \Omega - \omega_{mn}$  — его отстройка от частоты соответствующего перехода соединительного элемента. График зависимости периода осцилляций Раби от частоты сигнала показан на рисунке 2.9. На этом графике период для состояния  $|11\rangle$  удвоен. Итоговые частоты переходов соединительного элемента приведены в таблице 2.2.

### 2.2.6 Калибровка двухкубитной операции

Зная частоты переходов  $\omega_{mn}$  соединительного элемента для различных состояний вычислительных кубитов  $|mn\rangle \in \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , можно предва-

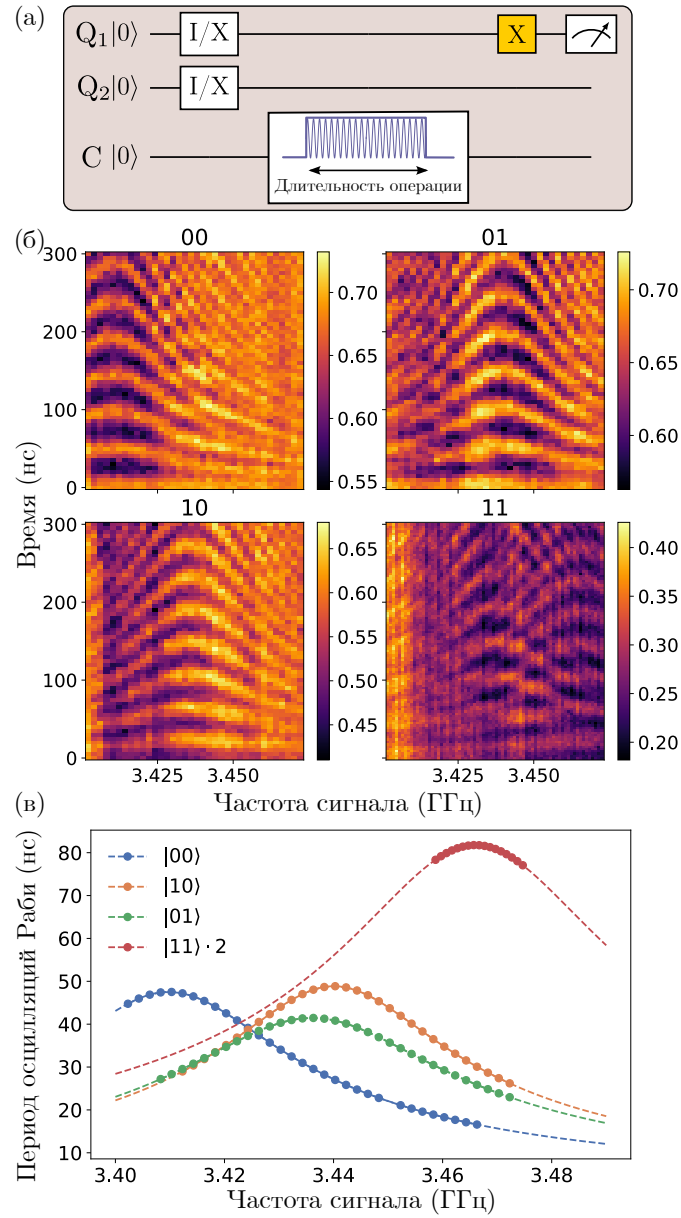


Рисунок 2.9: Осцилляции раби соединительного кубита для различных вычислительных состояний. (а) Последовательность импульсов возбуждения. Первые два однокубитных гейта подготавливают вычислительные кубиты в одном из четырех вычислительных состояний. Затем подается прямоугольный импульс на соединительный кубит заданной длительности, после чего выполняется выделенный цветом «считывающий»  $X$  гейт на первом кубите. В результате на первом кубите наблюдаются осцилляции Раби соединительного элемента, показанные на рисунке (б) для различных начальных состояний. (в) Период осцилляций Раби соединительного элемента в зависимости от частоты сигнала, полученный из осцилляционных картин. Обозначение  $|11\rangle \cdot 2$  в надписи означает, что период осцилляций умножен на 2.

	$\omega_{00}/2\pi$	$\omega_{10}/2\pi$	$\omega_{01}/2\pi$	$\omega_{11}/2\pi$	
Значение	3.4098	3.44009	3.43605	3.4660	ГГц
Погрешность	0.1	0.07	0.08	0.2	МГц

Таблица 2.2: Экспериментально определенные частоты переходов между основным и возбужденным состояниями соединительного элемента  $\omega_{00}$ ,  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{10}$  и  $\omega_{11}$  для четырех логических состояний вычислительных кубитов  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  и  $|11\rangle$ . Погрешность оценена через стандартное отклонение метода наименьших квадратов.

рительно оценить частоту, длительность и амплитуду управляющего импульса. Для уточнения этих параметров использовалась процедура калибровки, схематично изображенная на рисунке 2.10(а). Эту калибровку можно назвать условными осцилляциями Рамзея, а идея и схема взяты из работы [98].

В эксперименте для фиксированных параметров двухкубитного импульса измеряется населенность второго кубита в зависимости от однокубитного угла вращения  $\varphi$ , выделенного оранжевым цветом, в случаях, когда первый (управляющий) кубит был либо не был возбужден. Полученные результаты представлены на рисунке 2.10(в) и аппроксимированы функциями:

$$\begin{aligned} p_I(\varphi) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(\varphi + \varphi_2)) , \\ p_X(\varphi) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(\varphi + \varphi_2 + \theta)) , \end{aligned} \tag{2.6}$$

где угол  $\theta$  – фаза исследуемого двухкубитного гейта, которая определяется разностью фаз двух синусоид.

Повторяя эксперимент для прямоугольных импульсов разных амплитуд, была найдена оптимальная амплитуда, соответствующая фазе  $\pi$ , при заданной частоте сигнала. Полученная зависимость представлена на рисунке 2.10(в). Затем снова были измерены зависимости частот осцилляций Раби от частоты возбуждающего сигнала, уточнены частота и длительность импульса, после чего была откалибрована амплитуда сигнала при новых значениях частоты и длительности.

В общей сложности такая ступенчатая калибровочная процедура была проведена три раза, пока изменение амплитуды импульса не стало сравнимо с погрешностью ее определения. В результате длительность импульса составила 44 нс, а частота 3.438 ГГц.

## 2.3 Оценка точности квантовой операции

### 2.3.1 Методы оценки точности квантовых операций

Для реализации квантового процессора необходим метод оценки точности выполнения базовых одно- и многокубитных гейтов. На сегодняшний день наиболее распространены методы квантовой томографии и случайного тестирования (randomized benchmarking, RB). Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки.

Идея квантовой томографии заключается в экспериментальном определении конечного состояния системы, полученного в результате воздействия исследуемого гейта на заданное начальное состояние. Повторив это действие для нескольких начальных состояний, можно восстановить матрицу соответствующего процесса. Главными достоинствами такого метода являются возможность определить, какой именно процесс происходит в системе, а также его интуитивная понятность. Однако данный подход имеет существенную чувствительность к ошибкам приготовления начального состояния и измерения (state preparation and measurement, SPAM), что существенно снижает его точность. Кроме того, квантовая томография обладает крайне плохой масштабируемостью, что затрудняет ее применение для характеристики шума в многокубитных системах.

Другим методом оценки точности квантовых операций является случайное тестирование. Этот метод включает в себя генерацию большого числа случайных последовательностей клиффордовских гейтов, которые воздействуют на начальное состояние системы. Затем применяется обратная операция, и экспериментально определяется, насколько система изменилась относительно первоначального состояния. Если необходимо оценить точность выполнения конкретного гейта, процедуру модифицируют: изучаемая операция помещается меж-

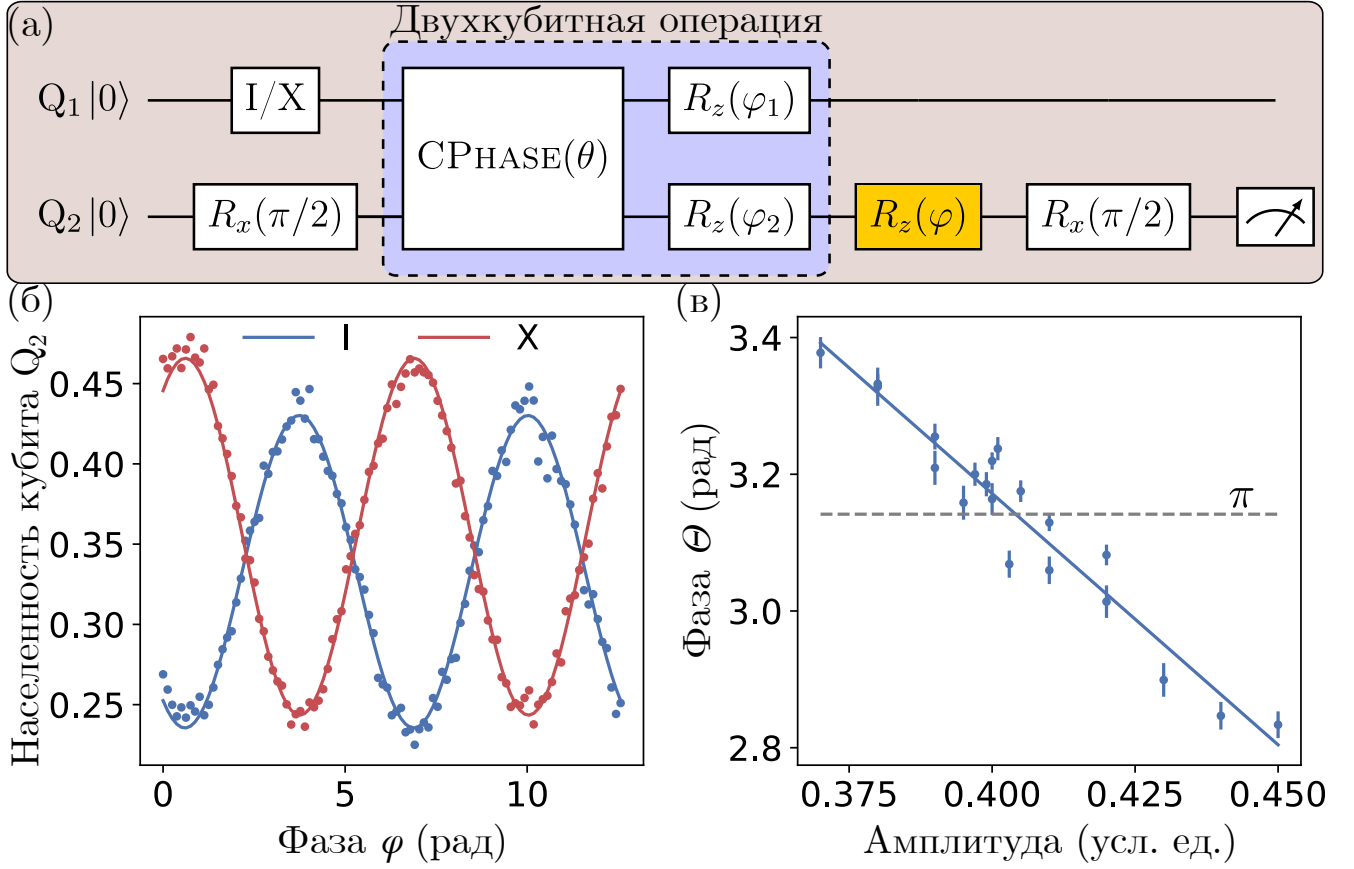


Рисунок 2.10: Калибровка двухкубитной операции CZ. (а) Последовательность импульсов, подаваемая в процессе калибровки. Первый кубит подготавливается в одном из двух состояний  $|0\rangle$  (гейт I) или  $|1\rangle$  (гейт X), а второй кубит – в суперпозиции состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Затем применяется двухкубитная управляемая фазовая операция, реализуемая с помощью микроволнового импульса, а также выполняется виртуальное вращение фазы на втором кубите, после чего на второй кубит действует операция вращения вокруг оси  $X$  на  $\pi/2$  и происходит его измерение. (б) Населенности  $p_I$  и  $p_X$  второго кубита в зависимости от фазы  $\varphi$  выделенного оранжевым цветом однокубитного гейта. Сплошная линия представляет аппроксимацию экспериментальных точек функцией 2.6. (в) Зависимость условной фазы  $\theta$  от амплитуды возбуждающего импульса. Пунктирной линией показано целевое значение фазы.



ду элементами случайной клиффордовской последовательности. Такой подход называется чередующимся случайным тестированием (interleaved randomized benchmarking, IRB). Важно отметить, что данный метод определяет среднюю точность операций и не предоставляет информации о матричном представлении гейта. Тем не менее, в отличие от квантовой томографии, он позволяет эффективно масштабировать количество кубитов и менее чувствителен к SPAM ошибкам.

Если известен общий вид исследуемого гейта и необходимо уточнение его параметров, применяют перекрестно-энтропийное тестирование (cross entropy benchmarking, XEB). Этот метод имеет схожий с IRB протокол выполнения, но в конце процедуры нет обратной операции, возвращающей систему в первоначальное состояние. Вместо этого измеряется итоговое распределение амплитуд вероятностей по вычислительным состояниям. Параллельно выполняется численное моделирование этого же эксперимента на классическом компьютере для определения теоретического распределения конечных состояний. Затем вычисляется перекрестная энтропия (функция потерь) между экспериментальным и теоретическим распределениями. Изменяя параметры модели, можно оптимизировать функцию потерь и тем самым определить параметры исследуемой операции. Этот метод по сравнению с квантовой томографией обладает лучшей масштабируемостью и точностью, поскольку менее подвержен влиянию SPAM ошибок и, в отличие от традиционного случайного тестирования, позволяет не только оценить среднюю точность выполнения исследуемого гейта, но и получить его матричное представление.

### 2.3.2 Квантовая томография процесса

Метод квантовой томографии позволяет полностью восстановить матрицу, описывающую повторяемую квантовую операцию. В рамках этого процесса осуществляется подготовка набора входных состояний, после чего производится исследуемая операция и выполняется измерение результатов в наборах базисов, позволяющих восстановить матрицу плотности конечного состояния.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  кубитов, в гильбертовом пространстве размерности  $d = 2^n$ . Состояние данной системы полностью описывается её матрицей плотности  $\rho$  размером  $d \times d$ . Тогда, как описывалось в 1.1.4, действие сохраняющего след квантового канала  $\Lambda : \rho \rightarrow \Lambda(\rho)$  может быть математически описано в представлении Паули-Лиувилля следующим образом:

$$\Lambda(\rho) = R_\Lambda |\rho\rangle\rangle, \quad (2.7)$$

где

$$(R_\Lambda)_{ij} = \frac{1}{d} \text{Tr}\{\mathcal{P}_i \Lambda(\mathcal{P}_j)\}, \quad (2.8)$$

$|\rho\rangle\rangle$  – векторизованная матрица плотности, а операторы  $\mathcal{P}_i$  образуют базис Паули  $\{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}$ .

Применяя квантовый канал к набору чистых состояний (обычно выбираются собственные состояния  $\mathcal{P}_i$ ) и измеряя выходное состояние в различных базисах  $\mathcal{P}_k$ , можно получить достаточное количество линейных уравнений для определения действительных коэффициентов  $(R_\Lambda)_{ij}$ . Следует также отметить, что в случае однокубитного процесса необходимо определить 12 параметров, для двухкубитного — уже 256, а для  $n$ -кубитного процесса количество параметров составляет  $2^n(2^n - 1)$ . Это указывает на то, что сложность данной задачи растёт экспоненциально с увеличением числа кубитов, что, в свою очередь, требует экспоненциально большего времени для проведения измерений.

### 2.3.3 Эксперимент по квантовой томографии процесса

Теперь от теоретических соображений следует перейти к описанию экспериментальной последовательности действий для измерения матрицы переноса паули исследуемого процесса. Сначала будет рассмотрен однокубитный случай, а затем более сложный – двухкубитный.

Для исследований однокубитного процесса следует инициализировать систему в одном из четырех начальных состояний  $\{Z+, Z-, X+, Y+\}$ . Такая запись обозначает, что состояние является собственным вектором оператора  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  с собственным числом  $+1$  или  $-1$ . Так, например, обозначениям  $Z-$  и

$X+$  соответствуют состояния  $|1\rangle$  и  $|+\rangle$ . Инициализация этих состояний происходит посредством применения однокубитных операторов вращения вокруг осей  $X$  и  $Z$  к начальному состоянию  $|0\rangle$ . После этого выполняется исследуемый процесс и происходит измерение системы в базисах  $\{X, Y, Z\}$ . При дисперсионном считывании происходит проективное измерение кубита в состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , то есть на ось  $Z$ . Для выполнения проективного измерения в базисах  $X$  и  $Y$  предварительно на кубит подаются однокубитные вращения  $\sqrt{X}S$  и  $\sqrt{X}$ , соответственно. Таким образом, процедура повторяется для каждого начального состояния и для каждого измерительного базиса и в итоге получается 12 экспериментальных последовательностей. Результатом выполнения каждой последовательности являются 12 вероятностей, по которым можно определить коэффициенты матрицы переноса паули  $(R_\Lambda)_{ij}$ .

В двухкубитном случае можно использовать 16 начальных состояний:

$$\{Z + Z+, Z + Z-, Z - Z+, Z - Z-, X + X+, X + X-, X - X+, Y + Y+, Y + Y-, Y - Y+, X + Y+, X + Z+, Y + X+, Y + Z+, Z + X+, Z + Y+\}$$

и 9 измерительных базисов

$$\{XX, XY, XZ, YX, YY, YZ, ZX, ZY, ZZ\}.$$

Квантовая схема для эксперимента по томографии двухкубитного процесса приведена на рисунке 2.11. Однокубитные операторы вращения  $V_i, V_j$  используются для инициализации нужного начального состояния кубитов, а вращения  $V_k, V_l$  – для считывания в требуемом базисе. Результатом работы такого алгоритма будет  $16 \cdot 9 \cdot 3 = 432$  вещественных чисел, соответствующих вероятности измерить систему в состояниях  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ . Вероятность  $p(|11\rangle)$  рассчитывается из соображений нормировки суммарной вероятности.

Итак, для исследуемой системы было экспериментально выполнено три различных эксперимента по томографии квантового процесса. Были восстановлены, с учетом коррекции ошибок считывания, матрицы переноса паули единичного гейта  $I$  нулевой длительности, операции CZ, реализованной посредством микроволнового импульса на соединительном элементе, и двух идущих подряд

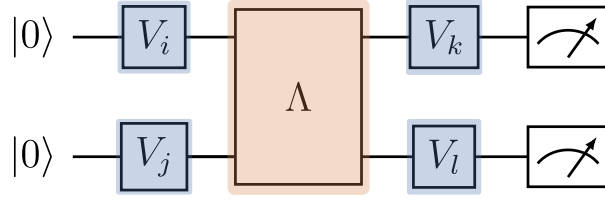


Рисунок 2.11: Квантовая цепь эксперимента по томографии двухкубитного процесса  $\Lambda$ . Однокубитные операторы вращения  $V_i$  и  $V_j$  используются для инициализации начальных состояний кубитов, а вращения  $V_k$  и  $V_l$  — для считывания в требуемом базисе.

$CZ$  гейтов. Полученные точности процессов  $I$ ,  $CZ$  и  $CZ^2$  составили 98.3%, 98.9% и 96.4% соответственно. Полученные матрицы переноса представлены на рисунке 2.12.

Как было упомянуто выше, основным недостатком метода квантовой томографии является сильное влияние ошибок инициализации и считывания на итоговый результат. Таким образом, учитывая невысокую точность считывания (параграф 2.2.3), точность операции  $CZ$  оказалась выше, чем у единичного гейта. Значительная разница в точности гейтов  $CZ$  и  $CZ^2$  свидетельствует о наличии остаточной популяции соединительного элемента после первого гейта  $CZ$ , что ожидаемо для текущих параметров системы. Действительно, если соединительный элемент не полностью возвращается в основное состояние после выполнения гейта, это не снижает точность текущего гейта, но влияет на последующие операции.

### 2.3.4 Перекрестно-энтропийное тестирование

Эволюция матрицы плотности системы под действием случайной последовательности преобразований  $U$ , состоящей из  $m$  операций, записывается следующим образом:

$$\rho_U = \varepsilon_m |\psi_U\rangle \langle \psi_U| + (1 - \varepsilon_m) \chi_U, \quad (2.9)$$

где  $|\psi_U\rangle = U |\psi_0\rangle$  — конечное состояние системы в идеальном случае, а  $\chi_U$  — оператор, который вместе с числом  $\varepsilon_m$  описывает эффект шума. В приближении деполяризующего канала  $\chi_U = I/d$ , где  $I$  — единичная матрица. В этом случае

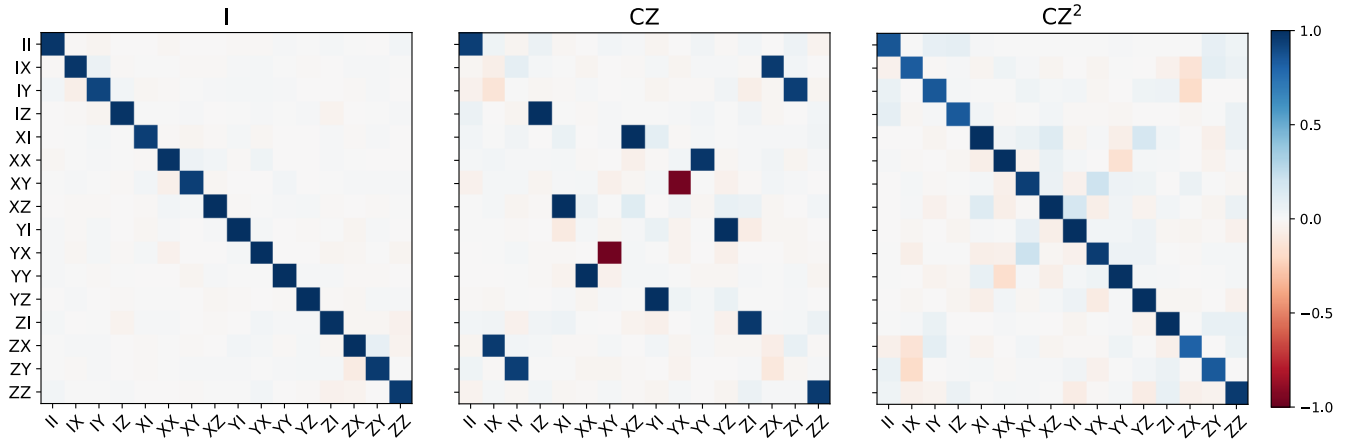


Рисунок 2.12: Экспериментальные матрицы переноса Паули, полученные для единичного гейта I нулевой длительности, CZ операции, реализованной посредством микроволнового импульса на соединительный элемент, и двух выполненных подряд CZ гейтов. Полученные точности процессов I, CZ, CZ<sup>2</sup> составили 98.3%, 98.9% и 96.4%, соответственно.

$\varepsilon_m$  – вероятность того, что система остается неизменной после  $m$  операций, а с вероятностью  $(1 - \varepsilon_m)$  она переходит в полностью смешанное состояние.

Тем не менее, в общем случае оператор  $\chi_U$  может содержать недиагональные элементы, отличные от нуля. Однако, если не рассматривать результаты эволюции каждой случайной последовательности по отдельности, а усреднить их действие по ансамблю случайных состояний, то вклад таких перекрестных членов будет равен нулю:

$$\overline{(U^\dagger \chi_U U)} = \frac{I}{d}, \quad (2.10)$$

где горизонтальная черта обозначает усреднение по многим случайным квантовым цепям. Таким образом, получается следующее выражение:

$$\overline{(U^\dagger \rho_U U)} = \overline{\varepsilon_m} |\psi_U\rangle \langle \psi_U| + (1 - \overline{\varepsilon_m}) \frac{I}{d}. \quad (2.11)$$

Свяжем вероятность деполяризации  $(1 - \varepsilon_m)$  со стандартной точностью, которая определяется по формуле:

$$F = \frac{\text{Tr}(R_{\text{ideal}}^\dagger R) + d}{d(d+1)}, \quad (2.12)$$

где  $R_{\text{ideal}}$  и  $R$  — матрицы переноса сравниваемых операций в базисе Паули. Тогда в случае деполяризующего канала получаем  $R = R_{\text{dep}} R_{\text{ideal}}$ , а сама матрица

деполяризации  $R_{\text{dep}}$  в этом представлении имеет диагональный вид:

$$R_{\text{dep}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\varepsilon_m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varepsilon_m} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{\varepsilon_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{\varepsilon_m} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

После преобразований получаем:

$$F = \frac{\text{Tr}(R_{\text{dep}}) + d}{d(d+1)} = \frac{1 + (d^2 - 1)(\overline{\varepsilon_m}) + d}{d(d+1)} = \overline{\varepsilon_m} + \frac{1 - \overline{\varepsilon_m}}{d}. \quad (2.14)$$

Теперь следует перейти от сугубо теоретических рассуждений к практической реализации протокола перекрестно-энтропийного тестирования. Пусть  $O_U$  – диагональный оператор наблюдаемых величин в вычислительном базисе. Тогда математическое ожидание действия данного оператора на матрицу плотности  $\rho_U$  определяется по формуле:

$$\text{Tr}(\rho_U O_U) = \overline{\varepsilon_m} \langle \psi_U | O_U | \psi_U \rangle + (1 - \overline{\varepsilon_m}) \text{Tr} \left( \frac{O_U}{d} \right). \quad (2.15)$$

Член  $m_U = \text{Tr}(\rho_U O_U)$  может быть получен из экспериментальных данных, а  $e_U = \langle \psi_U | O_U | \psi_U \rangle$  и  $u_U = \text{Tr}(O_U/d)$  – вычислены на классическом процессоре. В новых обозначениях предыдущее уравнение переписывается как:

$$m_U = \overline{\varepsilon_m} e_U + (1 - \overline{\varepsilon_m}) u_U. \quad (2.16)$$

Отсюда следует:

$$m_U - u_U = \overline{\varepsilon_m} (e_U - u_U). \quad (2.17)$$

Применив метод наименьших квадратов, получаем следующее выражение для вероятности  $\overline{\varepsilon_m}$  того, что система не перешла в полностью смешанное состояние:

$$\overline{\varepsilon_m} = \frac{\sum_U (m_U - u_U)(e_U - u_U)}{\sum_U (e_U - u_U)^2}. \quad (2.18)$$

Здесь сумма берется по различным случайным последовательностям операций. Оптимизируя полученную линейную перекрестную энтропию между экспериментальными и расчетными данными, в зависимости от параметров модели можно получить матричное представление исследуемого гейта и его точность.

### 2.3.5 Экспериментальная реализация перекрестно-энтропийного тестирования

Для тестирования точности квантового гейта методом ХЕВ необходимо в первую очередь научиться получать вспомогательные опорные последовательности квантовых операций, так, чтобы усредненный шум по ним эффективно описывался деполяризационным квантовым каналом. Обычно для создания таких опорных последовательностей используются случайные наборы гейтов из группы Клиффорда; в данной работе использовались операции из однокубитной группы Клиффорда.

С экспериментальной точки зрения задача заключается в выполнении произвольного клиффордовского гейта с наименьшим количеством предварительных калибровок. На сверхпроводниковых квантовых процессорах чаще всего калибруются однокубитные вращения вокруг оси  $x$  на угол  $\pi/2$  (гейт  $\sqrt{X}$ ). Эти гейты реализуются путем подачи микроволнового импульса на частоте кубита с гауссовой огибающей. Процесс калибровки  $\pi/2$ -импульсов, использованный в текущем эксперименте, подробно описан в работах [61, 76]. Вращения вокруг оси  $z$  на сверхпроводниковых кубитах выполняются виртуально: фаза управляющего сигнала изменяется непосредственно на генераторе импульсов, благодаря чему такие вращения не занимают времени и могут быть выполнены на произвольный угол.

На основе описанных базовых гейтов предлагается метод реализации произвольной операции из однокубитной группы Клиффорда. Формируются четыре

набора, каждый из которых содержит 24 однокубитных гейта:

$$\begin{aligned}
1 : & \{I, S, S^2, S^3, I, S, S^2, S^3, I, S, S^2, S^3, \\
& I, S, S^2, S^3, I, S, S^2, S^3, I, S, S^2, S^3\} \\
2 : & \{\sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \\
& \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \\
& \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}\} \\
3 : & \{I, I, I, I, S, S, S, S, S^2, S^2, S^2, S^2, \\
& S^3, S^3, S^3, S^3, I, I, I, I, S^2, S^2, S^2, S^2\} \\
4 : & \{I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, \\
& \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}, \sqrt{X}\}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Затем случайным образом генерируется целое число  $i$  от 1 до 24, после чего последовательно выполняется  $i$ -й гейт из каждого набора. В результате получается 24 различных операции Клиффорда. Гейты из первого и третьего наборов являются виртуальными, тогда как операции из второго и четвертого наборов требуют времени, не превышающего длительности операции  $\sqrt{X}$  (13.3 нс). Таким образом, выполнение произвольного однокубитного гейта Клиффорда занимает фиксированное время, равное 26.6 нс.

Итак, для определения точности исследуемой двухкубитной операции методом ХЕВ были использованы случайные последовательности однокубитных гейтов с и без вставленного между ними двухкубитного гейта CZ. Принципиальная последовательность операций представлена на рисунке 2.13(а). В эксперименте были реализованы квантовые схемы с глубиной до  $m = 100$  операций. Для каждой глубины было сгенерировано 150 наборов двух случайных независимых последовательностей однокубитных клиффордовских гейтов, обозначенных как  $\{C_{11}, \dots, C_{1m}\}$  для первого кубита и  $\{C_{21}, \dots, C_{2m}\}$  для второго. Результаты считывания были усреднены по 10 000 повторений для каждого набора операций.

Основная идея метода перекрестно-энтропийного тестирования заключается в сравнении экспериментальных данных с теоретическими. Для этого на



классическом компьютере выполняется бесшумная симуляция тех же последовательностей операций. Исследуемый двухкубитный гейт описывается следующей матрицей:

$$G = \text{CPhase}(\theta) \cdot R_Z(\varphi_1) \otimes R_Z(\varphi_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Для вычисления перекрестной энтропии между экспериментальными и теоретическими данными были подобраны два параметра:  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Оптимизация проводилась с помощью алгоритмов Нелдера-Мида и имитации отжига. Параметр  $\theta$  был установлен равным  $\pi$ , так как оценивалась точность операции CZ. Полученные зависимости средней деполяризационной точности  $F_{\text{dep}}$  от глубины исследуемой последовательности, представлены на рисунке 2.13(б). Синие точки отражают экспоненциальное затухание деполяризационной точности для опорных последовательностей однокубитных гейтов Клиффорда, выполняемых одновременно на двух кубитах. Оранжевые точки показывают аналогичные данные со вставленным CZ гейтом.

Экспериментальные данные были аппроксимированы функцией  $ap^m$ , где  $p$  — это средняя деполяризационная точность операций за цикл, а коэффициент  $a$  учитывает ошибки считывания и инициализации. С помощью метода наименьших квадратов были получены значения  $p_1 = 0.9900 \pm 0.0005$  и  $p_2 = 0.956 \pm 0.004$ , где  $p_1$  и  $p_2$  обозначают деполяризационные точности за цикл для последовательностей без и с гейтом CZ соответственно. Средняя деполяризационная точность гейта CZ определяется из отношения  $p_{\text{CZ}} = p_2/p_1$  [6, 76]. По формуле (2.14) были рассчитаны точность операции CZ, реализованной посредством микроволнового импульса на соединительный элемент, и средняя точность однокубитных клиффордовских гейтов, которые составили  $F_{\text{CZ}} = (97.6 \pm 0.4)\%$  и  $F_{1Q} = (99.28 \pm 0.03)\%$  соответственно.

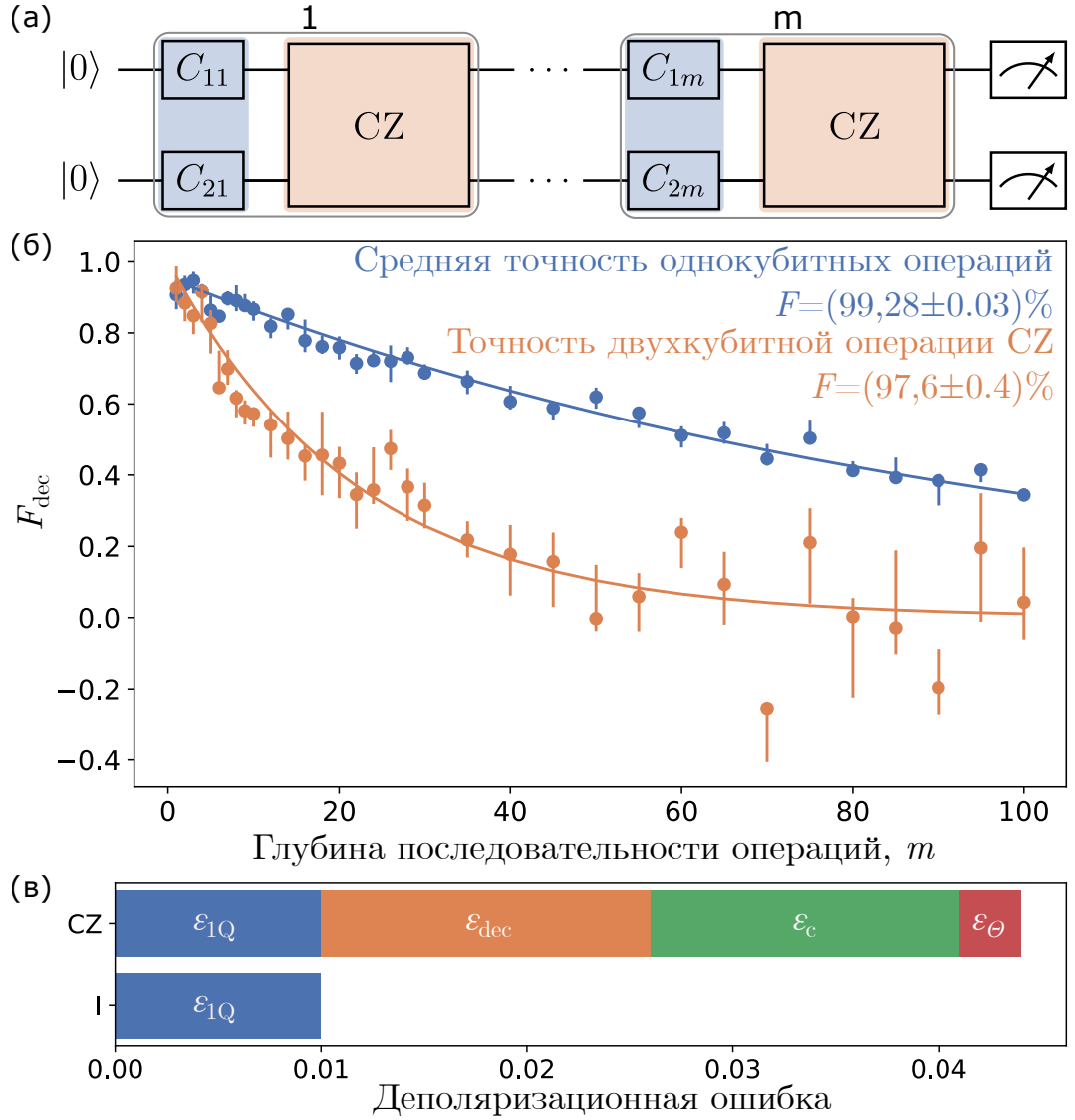


Рисунок 2.13: Перекрестно-энтропийное тестирование. (а) Квантовая схема эксперимента по ХЕВ. Синим цветом обозначены случайные однокубитные операции Клиффорда, а оранжевым — тестируемая двухкубитная операция CZ. (б) Средняя деполяризационная точность последовательностей ХЕВ с и без исследуемого CZ гейта. (в) Оценка вкладов различных ошибок в общую ошибку деполяризации реализованной операции: ошибки  $\varepsilon_{1Q}$  (синий) и  $\varepsilon_{dec}$  (оранжевый) соответствуют декогеренции на вычислительных кубитах во время одно- и двухкубитных операций; ошибка  $\varepsilon_{\theta}$  (красный) связана с неточностью контролируемой фазы  $\pi$  гейта CZ;  $\varepsilon_c$  (зеленый) — остаточная ошибка, учитывающая эффекты декогеренции и остаточной населенности соединительного элемента.

### 2.3.6 Анализ ошибок, влияющих на точность операции

В этом разделе проведена оценка вкладов различных источников ошибок в общую деполяризационную ошибку  $\varepsilon = 1 - p = 0.034$  гейта CZ. Оценка выполнена двумя методами: путем анализа экспериментальных данных, полученных при перекрестно-энтропийном тестировании, и с помощью численного моделирования динамики системы.

При определении точности операции методом ХЕВ на классическом компьютере рассчитываются вероятности считывания квантового состояния для случайных последовательностей, реализованных в эксперименте. Это позволяет находить параметры исследуемых операций. Например, таким способом были определены фазы однокубитных Z вращений. В формуле (2.20) присутствуют три параметра, из которых оптимизировались лишь два. При оптимизации всех трех параметров был получен угол условного вращения  $\theta \simeq 0.963\pi$ , что соответствует вкладу в общую деполяризационную ошибку  $\varepsilon_\theta \simeq 0.003$ .

Следующий источник ошибок — декогеренция вычислительных кубитов. Этот вклад был оценен путем экстраполяции средней ошибки однокубитных гейтов  $\varepsilon_1 = 1 - p_1 = 0.01$  с длительностью операции 26.6 нс на длительность двухкубитного гейта CZ 44 нс, что дало ошибку  $\varepsilon_{\text{dec}} \simeq 0.016$ .

Оставшаяся часть ошибки  $\varepsilon_c \simeq 0.015$  включает в себя, в том числе процессы декогеренции и остаточную населенность соединительного элемента. Вклад различных источников ошибок в общую деполяризационную ошибку представлен на итоговой гистограмме, показанной на рисунке 2.13(в).

Далее приведем численную оценку когерентной ошибки исследуемой операции, основываясь на экспериментально определенных временах когерентности вычислительных кубитов:  $T_1$  равные 15.8 и 22.0 мкс;  $T_2$  равные 4.5 и 5.8 мкс. Для этого была выполнена симуляция эволюции системы путем решения уравнения Линдблада:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_i \left( 2L_i \rho L_i^\dagger - \rho L_i^\dagger L_i - L_i^\dagger L_i \rho \right), \quad (2.21)$$

где операторы  $L_i$  описывают диссипативную динамику системы. Для кубитов

такие операторы, соответствующие энергетической релаксации и чистой дефазировки, определяются как:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2\sqrt{T_1}}(\sigma_x + i\sigma_y), \\ L_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2T_\varphi}}\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  – операторы Паули, а времена релаксации  $T_1$ , когерентности  $T_2$  и чистой дефазировки  $T_\varphi$  связаны следующим соотношением

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\varphi}. \quad (2.23)$$

В результате численного моделирования деполяризационная ошибка однокубитных гейтов Клиффорда длительности 26 нс составила 0.64%, а двухкубитной операции CZ длительности 44 нс – 1.05%.

Из-за отсутствия индивидуального считывающего резонатора у соединительного элемента измерения его времен релаксации и когерентности не проводились. Однако, как и вычислительные кубиты, он является флаксономом, поэтому для численной оценки возьмем значения характерные для вычислительных кубитов:  $T_1 = 18$  мкс и  $T_2 = 5$  мкс. Итоговая деполяризационная ошибка двухкубитной операции, полученная численным решением уравнения Линдблада с шумом, действующим на связующий элемент, и идеальными кубитами, составила 0.28%. Сравнение этой величины с ошибкой, полученной вследствие затухания кубитов, позволяет заключить, что когерентность соединительного кубита значительно меньше влияет на точность операции, чем когерентность вычислительных кубитов. Несоответствие с экспериментальной точностью, полученной методом перекрестно-энтропийного тестирования операции, может быть объяснено, во-первых, более коротким временем когерентности соединительного элемента, так как он находится в верхней рабочей точке по потоку, а во-вторых, когерентными ошибками, связанными с остаточной населенностью соединительного элемента.

Остаточная населенность соединительного элемента влияет на достоверность однокубитных гейтов, выполняемых после двухкубитного гейта CZ. Оста-

точная населенность соединительного элемента для каждого вычислительного состояния была рассчитана с использованием уравнения (4). Она составила 2.0% и 1.4% для вычислительных состояний  $|01\rangle$  и  $|10\rangle$ . Остаточная населенность соединительного элемента для вычислительных состояний  $|00\rangle$  и  $|11\rangle$  была значительно меньше из-за калибровки (см. правый вставной график на рис. 2). Эти населенности значительно превышали равновесную тепловую населенность возбуждённого состояния соединителя, равную 0.07% для частоты перехода 3 ГГц при температуре 20 мК. Согласно численной оценке, если остаточная населенность соединительного элемента составляет 2%, что соответствует максимальному значению после операции CZ, достоверность однокубитного гейта  $X$  длительности 26 нс снижается до 98.7%.

Следует отметить, что ошибки для последовательностей с операцией CZ значительно больше, чем для последовательностей, содержащих только однокубитные операции. Это связано с большим разбросом достоверностей для различных случайных последовательностей, что указывает на значительную долю когерентных ошибок в реализованных двухкубитных гейтах.

## 2.4 Выводы по главе

В данной главе был предложен и экспериментально реализован метод выполнения двухкубитной операции CZ на флаксонаумах с помощью микроволнового возбуждения соединительного кубита. Показано, что благодаря сильному взаимодействию между соединительным и вычислительными флаксонаумами частота перехода соединительного кубита сильно зависит от состояния вычислительных кубитов. Это позволяет подобрать частоту микроволнового возбуждения так, чтобы скорость накопления фазы различалась для различных вычислительных состояний, что приводит к эффективной реализации операции CZ. В эксперименте продемонстрирован гейт с точностью 97.6% и длительностью 44 нс, оцененной методом перекрестно-энтропийного тестирования. Анализ ошибок показал, что основными ограничивающими факторами точности являются процессы декогеренции и остаточная населенность соединительного

элемента. Результаты теоретических и экспериментальных исследований отражены в публикациях [95, 96].

Полученные результаты открывают новые возможности для дальнейшего развития квантовых процессоров на основе флакониумов. В первую очередь речь идет о дальнейшем масштабировании устройства и исследовании топологических особенностей системы для увеличения времен когерентности кубитов и точности управления устройством. Предложенный метод управления двухкубитным взаимодействием на основе микроволновой активации соединительного элемента демонстрирует высокую эффективность и может быть применен не только для двухкубитных гейтов, но для выполнения многокубитных операций [51].

Следует отметить, что схожий подход был независимо реализован исследователями Массачусетского технологического института в это же время [45] (предварительная версия публикации появилась на интернет-ресурсе arXiv после публикации результатов, описанных в данной главе). В их работе также использовалась идея микроволновой операции между двумя флакониумами связанными через кубит-трансон посредством микроволнового импульса. Эксперимент показал рекордную точность такой операции, что подтверждает эффективность и актуальность предложенного метода для дальнейшего развития квантовых вычислений. Совокупность этих результатов подчеркивает потенциал микроволновых методов управления для построения высокоточных двухкубитных операций в флакониумных процессорах.

### 3 Коды коррекции квантовых ошибок циклической архитектуры

Экспериментальная реализация кодов коррекции квантовых ошибок требует большого числа кубитов и высокой точности операций. При этом важно учитывать топологию вычислительного устройства, чтобы минимизировать число необходимых гейтов. В сверхпроводниковых системах двухкубитные операции обычно возможны только между соседними кубитами, что существенно ограничивает выбор кода. Также важным аспектом кодов коррекции является их масштабируемость — способность исправлять больше ошибок по мере роста числа используемых кубитов.

В данной работе исследуется семейство кодов коррекции, стабилизаторы которых формируются по принципу циклических перестановок, аналогично пятикубитному коду. Их отличительная особенность — линейная зависимость числа физических кубитов от расстояния кода, хотя это сопровождается увеличением веса стабилизаторов. Предлагаемая схема основана на чередующихся вспомогательных и информационных кубитах, геометрически соединенных в кольцо, где между соседними кубитами можно реализовывать операции  $i$ SWAP и SWAP.

Кроме того, разработан алгоритм декодирования квантовых ошибок на основе рекуррентных нейронных сетей. Он использует не только измерения вспомогательных кубитов, но и результаты простого табличного декодера. Такой подход позволяет успешно справляться с многокубитными ошибками в кодах коррекции со смешанными  $X$  и  $Z$  синдромами.

Таким образом, в данной главе рассматриваются разработка и анализ кодов коррекции для квантовых процессоров циклической архитектуры, включая построение квантовой схемы, алгоритм декодирования и оценку его эффективности.

## 3.1 Построение циклических кодов коррекции

### 3.1.1 Концепция переадресуемого вспомогательного кубита

При разработке кодов коррекции ошибок важно учитывать архитектурные особенности физической платформы. Для сверхпроводниковых процессоров ключевой особенностью является то, что запутывающие операции осуществляются преимущественно между кубитами, расположенными рядом друг с другом. В ходе цикла коррекции вспомогательные кубиты взаимодействуют с несколькими информационными кубитами, поэтому необходимо принимать во внимание их физическое расположение на процессоре. Это существенно ограничивает выбор кодов коррекции, которые можно эффективно реализовать на сверхпроводниковых платформах, поскольку они зависят от топологии устройства.

Одним из способов создать запутанность между кубитами, которые не являются соседними, является «перемещение» посредством последовательных операций SWAP. Однако такие гейты не являются естественными для большинства сверхпроводниковых процессоров и реализуются с помощью нескольких последовательно выполняемых двухкубитных операций. Это существенно увеличивает глубину схемы, что, в свою очередь, ведет к накоплению большего числа ошибок за время выполнения цикла коррекции. В результате эффективность работы кода коррекции заметно снижается.

Интересно, что если рассматривать гейт SWAP в сочетании с операцией CNOT или CZ, которые обычно применяются для создания запутанности в большинстве стабилизирующих кодов коррекции, то оба действия можно выполнить одновременно с помощью всего одной операции iSWAP [99]. Операция iSWAP позволяет одновременно запутать два кубита и поменять их состояния местами, что устраняет необходимость во множестве последовательных гейтов, характерных для реализации SWAP. При этом iSWAP является естественным гейтом для многих архитектур сверхпроводниковых процессоров [43, 68, 100–102]. На рисунке 3.1(а) показаны эквивалентные квантовые схемы, реализующие запутанность двух кубитов с последующим изменением их адресации.



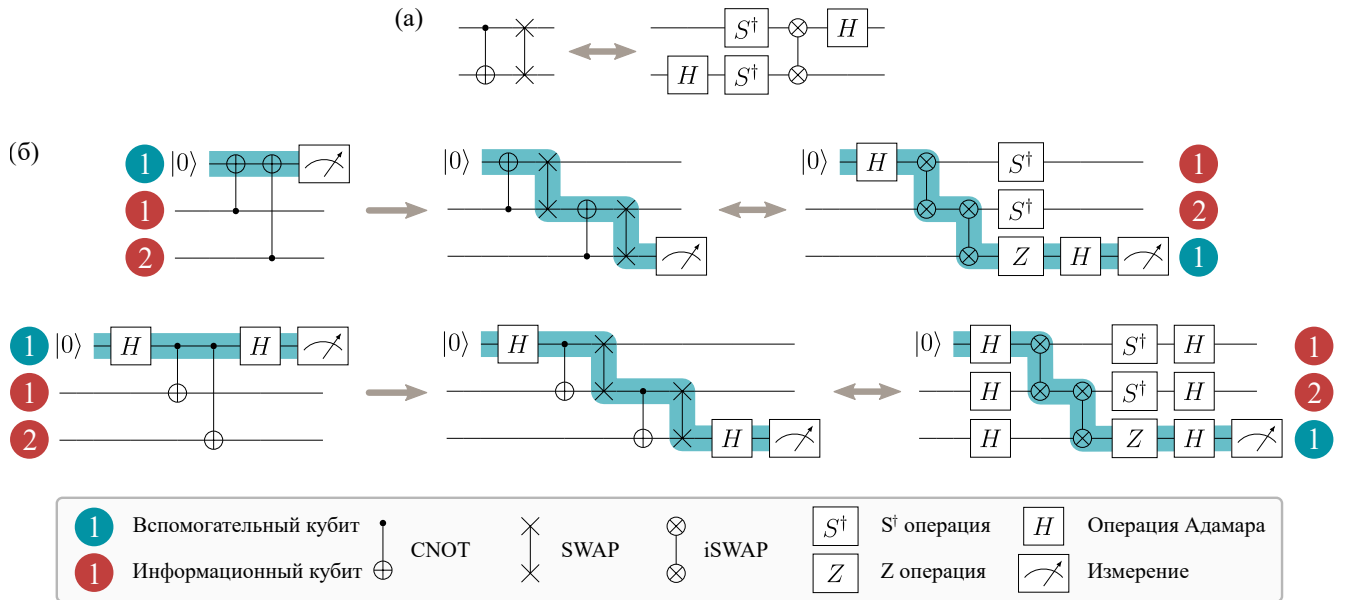


Рисунок 3.1: (а) Реализация последовательных гейтов CNOT и SWAP с использованием одной двухкубитной операции iSWAP и однокубитных вращений. (б) Преобразование стандартных квантовых схем для измерения стабилизаторов  $ZZ$  (сверху) и  $XX$  (снизу) в схемы, основанные на использовании операции iSWAP и концепции переадресуемых вспомогательных кубитов.

Эта идея послужила основой для концепции переадресуемого вспомогательного кубита. На рисунке 3.1(б) слева показаны стандартные квантовые схемы для извлечения синдромов  $ZZ$  и  $XX$ . Они используют один вспомогательный кубит, выделенный бирюзовым цветом, который запутывается с двумя информационными кубитами (отмеченными красным цветом) посредством двух CNOT-гейтов. Такой подход упрощает реализацию запутанности между кубитами, включая те, которые физически не являются соседними на физической топологии процессора.

### 3.1.2 Квантовая схема пятикубитного кода на iSWAP гейтах

Используя концепцию переадресуемых кубитов, можно решить топологическую проблему, связанную с извлечением синдромов идеального пятикубитного кода, описанную в 1.3.4. Эти синдромы могут быть эффективно извлечены с использованием кольцевой архитектуры, состоящей из 10 последовательно со-

единённых кубитов, из которых пять являются информационными, а остальные пять — вспомогательными.

Предполагается, что для каждого кубита откалиброваны произвольные однокубитные вращения, а также доступны операции инициализации и однократного считывания. Для выполнения цикла коррекции ошибок предложена квантовая схема, состоящая исключительно из двухкубитных гейтов  $i\text{SWAP}$ , применяемых между соседними кубитами. Графическое представление схемы показано на рисунке 3.2. На схеме информационные кубиты выделены красным цветом, а вспомогательные кубиты — зеленым. Слева изображено их кольцевое расположение.

Опишем подробно цикл коррекции ошибок. Каждый цикл начинается с инициализации вспомогательных кубитов. Наиболее важными частями цикла являются четыре серии гейтов  $i\text{SWAP}$ , которые создают запутанность между соседними кубитами. Действие операции  $i\text{SWAP}$ , как упоминалось ранее, можно разложить на применение  $CZ$  гейта, обмен их вычислительными состояниями и выполнение однокубитных гейтов  $S$  на обоих кубитах. Поэтому для компенсации набега фазы, возникающего после выполнения  $i\text{SWAP}$  гейта, в схему добавлены дополнительные  $S$  и  $Z$  вращения. Операции Адамара используются для смены базиса, что позволяет извлекать как  $X$ -, так и  $Z$ -синдромы.

Таким образом, информационные кубиты как бы «движутся» по кольцу по часовой стрелке, а вспомогательные кубиты — против часовой стрелки. Зелёным цветом на рисунке 3.2 показано «перемещение» первого вспомогательного кубита, а красным цветом выделен «путь» информационных кубитов, запутывающихся с ним. В итоге мы наблюдаем сдвиг или переадресацию вспомогательных и информационных кубитов относительно друг друга. В конце описываемого цикла выполняется однократное проективное измерение всех вспомогательных кубитов.

Следует отметить, что схема включает избыточный вспомогательный кубит, соответствующий синдрому  $g_4 = XXZIZ$ , который не является независимым и представляет собой произведение других синдромов.

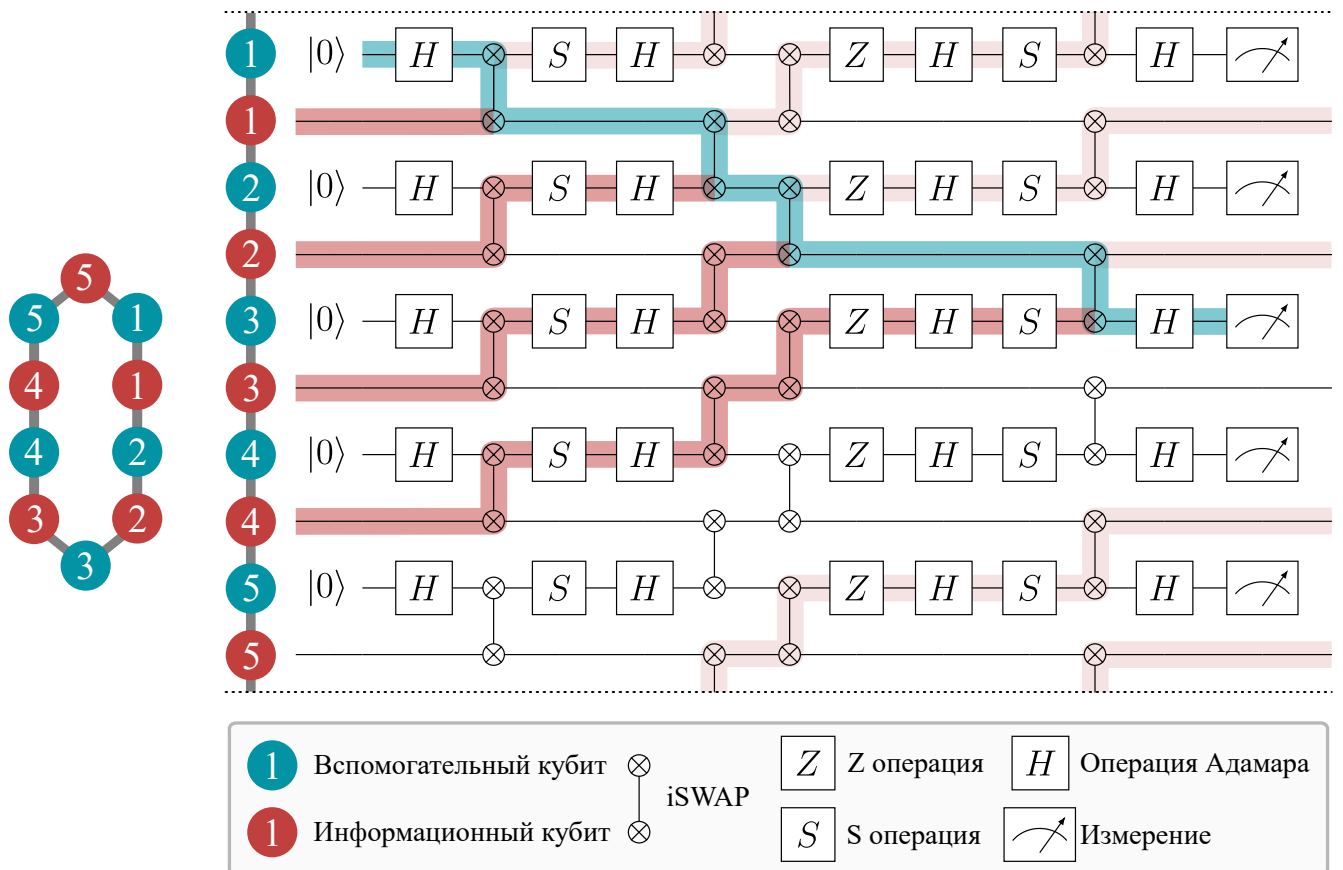


Рисунок 3.2: Реализация идеального пятикубитного кода на циклической архитектуре сверхпроводникового процессора. Слева представлена топология связей между кубитами: красным цветом обозначены информационные кубиты, хранящие информацию о состоянии логического кубита, а зеленым — вспомогательные кубиты. Справа показана квантовая схема, выполняющая запутывание между информационными и вспомогательными кубитами.

Цветовое обозначение иллюстрирует процесс запутывания между топологически не соседними кубитами.

### 3.1.3 Масштабирование для малых дистанций

Одним из важных аспектов при разработке кодов коррекции ошибок является их масштабируемость, то есть способность исправлять экспоненциально большее число ошибок при увеличении числа кубитов. Напомним, что код коррекции ошибок обозначается как  $[n, k, d]$ , где  $n$  — количество физических кубитов, хранящих информацию о  $k$  логических кубитах, а  $d$  — дистанция кода. Этот параметр определяет количество ошибок, которое может быть исправлено, и связан с количеством корректируемых ошибок  $t$  по формуле  $d = 2t + 1$ .

В данной работе предлагается способ масштабирования пятикубитного кода, при котором число кубитов растет линейно, но сопровождается увеличением веса синдромов. Итак, код коррекции ошибок, кодирующий один логический кубит в  $n$  физических кубитов, может быть описан  $n - 1$  стабилизаторами. Ниже приведены базовые стабилизаторы для линейных циклических кодов с дистанциями  $d = 3$ ,  $d = 5$ ,  $d = 7$  и  $d = 9$ :

$$\begin{aligned}
 d = 3, n = 5 : g_0 &= ZXXZI, \\
 d = 5, n = 13 : g_0 &= ZIXXIZ \underbrace{I \dots I}_7, \\
 d = 7, n = 21 : g_0 &= ZIIXXXIIZ \underbrace{I \dots I}_{11}, \\
 d = 9, n = 29 : g_0 &= ZXXIIXIIXIIXXZ \underbrace{I \dots I}_{15},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $I$  — операторы Паули. В выражении подразумевается тензорное произведение  $\otimes$  между операторами. Оставшиеся  $n - 2$  стабилизатора могут быть получены из  $g_0$  циклической перестановкой индексов кубитов. Логические операторы кодов определяются как произведение операторов, действующих на всех  $n$  кубитах:

$$X_L = X^{\otimes n}, Y_L = Y^{\otimes n}, Z_L = Z^{\otimes n}. \tag{3.2}$$

Код с  $d = 3$  известен как идеальный пятикубитный код. Его реализация на кольцевой топологии из 10 последовательно соединённых сверхпроводниковых кубитов с использованием iSWAP-операций подробно рассматривалась в

предыдущем разделе. В данном разделе рассматривается масштабирование этого подхода для кодов с большими дистанциями на примере 13-кубитного кода с  $d = 5$ . Для остальных кодов схемы строятся по аналогичным принципам.

Квантовая схема для выполнения цикла коррекции ошибок 13-кубитного кода представлена на рисунке 3.3. Она содержит 26 физических кубитов, из которых половина используется для хранения закодированного логического состояния, а другая половина – для извлечения синдромов ошибок. Каждый цикл коррекции начинается с инициализации всех вспомогательных кубитов в основном состоянии и завершается однократным проективным измерением этих кубитов. В ходе выполнения цикла коррекции каждый вспомогательный кубит взаимодействует с шестью информационными кубитами и запутывается с четырьмя из них. На рисунке 3.3 зелёным цветом показана траектория «перемещения» первого вспомогательного кубита, а красным — информационных кубитов, которые запутываются с ним.

Важное отличие 13-кубитного кода от пятикубитного заключается в использовании SWAP гейтов, которые позволяют обменивать состояния между соседними кубитами без создания запутанности. Эти операции не являются естественными для многих квантовых процессоров, но могут быть реализованы с помощью трех CZ или CNOT гейтов, или трех  $\sqrt{i\text{SWAP}}$  гейтов (по временным затратам эквивалентно примерно полутора длительностям одной  $i\text{SWAP}$  операции), или одним  $\text{fSIM}(\pi/2, \pi)$  гейтом с дополнительными однокубитными вращениями [43]. Последний вариант поддерживается, например, на квантовых процессорах Sycamore и Willow компании Google и китайской линейки процессоров Zuchongzhi [7, 9].

Как бы то ни было, увеличение веса синдромов и наличие дополнительных SWAP операций приводит к существенному увеличению длительности цикла коррекции при росте числа кубитов. По этой причине данный код нельзя считать в полном смысле масштабируемым. Именно поэтому в данной работе рассматривается его масштабирование только на малых дистанциях, так как дальнейшее увеличение числа кубитов приводит к удлинению цикла коррекции, что делает код неэффективным. Тем не менее, для малых дистанций, в услови-

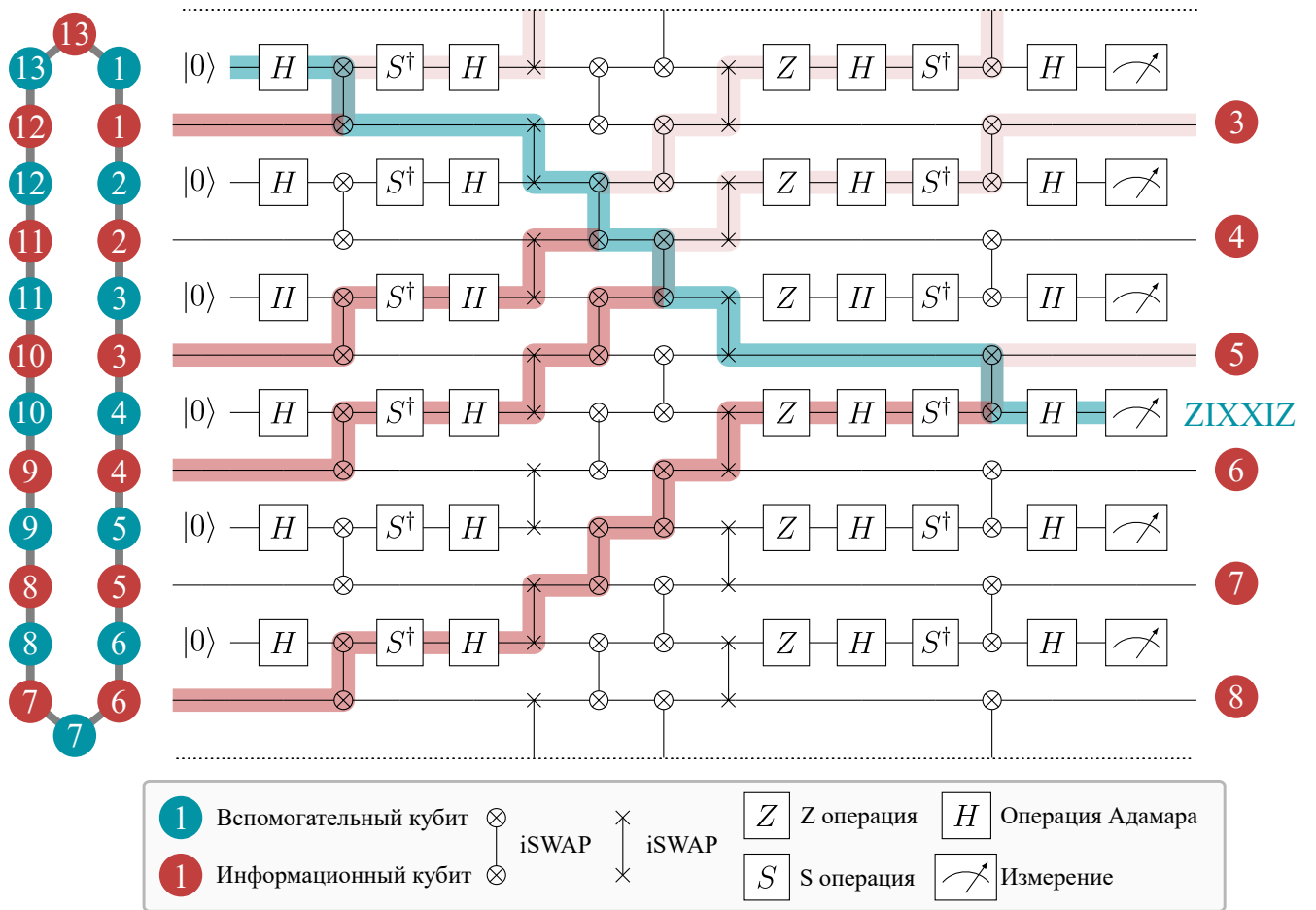


Рисунок 3.3: Схематичное расположение кубитов в виде замкнутой цепочки и часть квантовой схемы 13-кубитного кода. Зеленым и красным цветом обозначены вспомогательные и вычислительные кубиты соответственно. Полная схема кода может быть воспроизведена путем трансляционного преобразования показанной части на остальные кубиты. Основу алгоритма составляют шесть серий двухкубитных операций, применяемых к соседним кубитам. Цветами показаны траектории вычислительного состояния первого вспомогательного кубита и взаимодействующих с ним во время цикла коррекции вычислительных кубитов.

Дистанция	3	5	7	9
iSWAP	20	52	126	232
SWAP	0	26	84	174
$H$	20	52	84	116

Таблица 3.1: Количество квантовых операций, выполняемых в ходе одного цикла коррекции предложенного циклического кода.

ях, когда экспериментально доступны высокоточные двухкубитные операции, но есть ограничения с количеством кубитов, такой подход к масштабированию может оказаться действенным. Ниже приведено сравнение технических требований данного кода и некоторых других распространенных кодов коррекции квантовых ошибок.

#### 3.1.4 Количество требуемых кубитов и двухкубитных операций

Сформулируем требования к физическому устройству для реализации предложенного циклического кода. В первую очередь это количество физических кубитов и связей между ними, что для сверхпроводниковых кубитов обычно подразумевает наличие соединительных элементов с индивидуальным управлением при помощи внешних приборов. Количество физических кубитов для кода с расстоянием  $d \in \{3, 5, 7, 9\}$  определяется выражением  $N = 8d - 14$ . Число элементов связи в циклическом коде также задаётся формулой  $N_{2Q} = 8d - 14$ . Таким образом, предложенный циклический код масштабируется линейно по требуемыми ресурсами, определяемыми числом физических кубитов и элементов связи. В таблице 3.1 приведено общее количество квантовых операций, необходимых для одного цикла коррекции предложенного кода.

Кроме того, выполнено сравнение требований к ресурсам, необходимым для реализации предложенного циклического кода, с наиболее известными поверхностными [103], цветными [104] и торическим циклическим [105, 106] кодами. Сравнительный анализ представлен на рисунке 3.4. Для реализации поверхностного кода требуется  $N^{\text{surface}}$  физических кубитов и  $N_{2Q}^{\text{surface}}$  двухкубитных

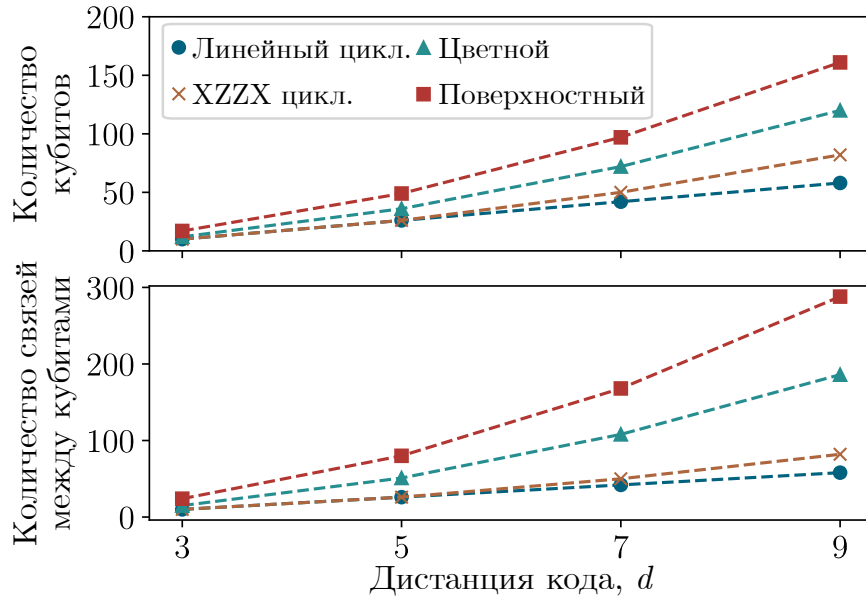


Рисунок 3.4: Сравнение требований к ресурсам предложенного кода с некоторыми перспективными кодами коррекции квантовых ошибок. Под ресурсами понимается общее число физических кубитов (верхний график) и двухкубитных операций, реализуемых между различными парами кубитов (нижний график). Требования предложенного циклического кода (синие круги) масштабируются линейно, тогда как требования циклического торического кода (оранжевые кресты), треугольного цветного кода (зеленые треугольники) и повернутого поверхностного кода (красные квадраты) демонстрируют квадратичную зависимость. Пунктирные линии указывают на характер каждой зависимости.

операций, связанных с дистанцией  $d$  следующими соотношениями

$$\begin{aligned} N^{\text{surface}} &= 2d^2 - 1, \\ N_{2Q}^{\text{surface}} &= 4d(d - 1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Цветной треугольный код характеризуется количеством кубитов  $N^{\text{color}}$  и двухкубитных операций  $N_{2Q}^{\text{color}}$ :

$$\begin{aligned} N^{\text{color}} &= (3d^2 - 1)/2 \\ N_{2Q}^{\text{color}} &= 3(7d^2 - 8d + 1)/8. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Торический циклический код задаётся циклической перестановкой операторов



базового синдрома

$$ZI^{\otimes(t-1)}XXI^{\otimes(t-1)}ZI^{\otimes(n-2t-2)}, \quad (3.5)$$

где  $t = (d-1)/2$ . Реализация этого кода возможна на архитектуре, аналогичной той, что используется для предложенного кода, с применением гейтов iSWAP и SWAP. В данном случае требуется

$$N^{\text{toric}} = N_{2Q}^{\text{toric}} = d^2 + 1 \quad (3.6)$$

физических кубитов и двухкубитных операций. Заметим, что для дистанций  $d = 3$  и  $d = 5$  торический циклический код и предложенный код являются идентичными. Различия начинают проявляться при  $d = 7$ .

Как видно, все рассматриваемые коды, за исключением предложенного циклического кода, характеризуются квадратичной зависимостью числа физических кубитов и элементов связи от расстояния кода, что приводит к увеличению требований к управляющей электронике. В то же время, предложенный код, несмотря на линейную масштабируемость, требует большее количество двухкубитных операций (при меньшем числе элементов связи). Это связано с возрастающими весами синдромов, используемых в данной архитектуре.

### 3.1.5 Квантовая схема 17-кубитного поверхностного кода

Схема моделирования эксперимента по хранению квантового состояния для кода поверхности аналогична процедуре, использованной для пятикубитного кода. Она включает три этапа: подготовка информационных кубитов, корректирующие циклы и измерение этих кубитов. Первый и третий этапы идентичны этапам пятикубитного кода, за исключением количества информационных кубитов.

Квантовая схема для цикла коррекции 17-кубитного поверхностного кода представлена на рисунке 3.5 [107]. Она включает вращения кубитов вокруг оси  $y$  и четыре серии одновременных двухкубитных CZ гейтов (по три гейта в каждой серии). Стабилизаторы 17-кубитного поверхностного кода определяются

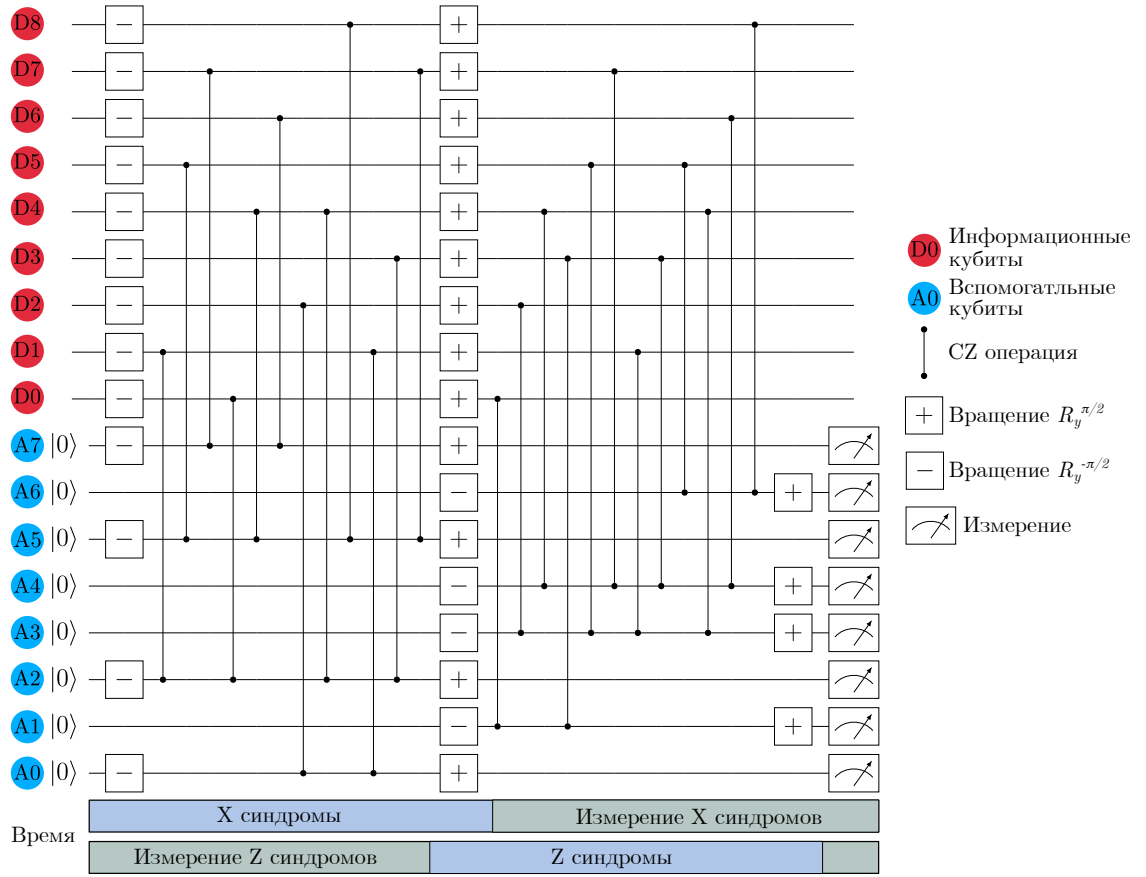


Рисунок 3.5: Квантовая схема цикла коррекции ошибок 17-кубитного поверхностного кода, состоящая из однокубитных вращений вокруг оси  $y$  и восьми серий одновременных CZ-гейтов [107].

следующим образом:

**X-стабилизаторы      Z-стабилизаторы**

$$S_{A0} = X_1 X_2 \quad S_{A1} = Z_0 Z_3$$

$$S_{A2} = X_0 X_1 X_3 X_4 \quad S_{A3} = Z_1 Z_2 Z_4 Z_5$$

$$S_{A5} = X_4 X_5 X_7 X_8 \quad S_{A4} = Z_3 Z_4 Z_6 Z_7$$

$$S_{A7} = X_6 X_7 \quad S_{A6} = Z_5 Z_8$$

где индексы у операторов Паули  $X$  и  $Z$  соответствуют номерам информационных кубитов.

Особенно примечательно, что измерение операторов чётности  $X$  операторов информационных кубитов начинается сразу после выполнения гейтов  $R_y^{\pi/2}$  на кубитах  $\{A0, A2, A5, A7\}$ , а измерение вспомогательных кубитов  $Z$  синдромов продолжается во время выполнения первых четырёх серий CZ-гейтов, как пока-

зано на временной шкале рисунка 3.5. Таким образом, полный цикл коррекции включает 4 двухкубитных гейта, 2 однокубитных вращения и одну процедуру измерения с последующим сбросом, что в сумме составляет 800 нс.

Схема моделировалась с использованием тех же моделей шума, что и для пятикубитного кода.

## 3.2 Модели ошибок

### 3.2.1 Число корректируемых ошибок

Перед тем как перейти к численному эксперименту, необходимо понять, какие результаты ожидаются и как их следует интерпретировать. Для этого рассмотрим простую модель ошибок, которая, несмотря на свою упрощённость, позволяет понять принципиальную зависимость логической ошибки от физической в зависимости от дистанции кода. Такая модель обычно используется для оценки того, сколько ошибок может исправить предложенная схема.

Пусть  $N$  — число физических кубитов, используемых для хранения информации о логическом кубите в рамках выбранного кода коррекции квантовых ошибок. Обозначим  $L$  как максимальное количество ошибок, которые код способен исправить, а  $p$  — вероятность ошибки одного кубита за цикл (считается, что ошибки кубитов независимы). Вероятность того, что за цикл случится ровно  $k$  ошибок, определяется формулой биномиального распределения:

$$p_k = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}, \quad (3.7)$$

где  $C_N^k$  — число сочетаний. Чтобы код мог исправить ошибку, должно произойти не более  $L$  ошибок. Вероятность успешной коррекции ошибок выражается в виде суммы вероятностей для всех случаев, когда  $k \leq L$ :

$$p_L = \sum_{k=0}^L C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}. \quad (3.8)$$

Соответственно, вероятность некорректируемой ошибки (логической ошибки)

равна:

$$\epsilon = 1 - p_L = \sum_{k=L+1}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \quad (3.9)$$

Анализ этой суммы показывает, что ведущий член, а значит, и вероятность некорректируемой логической ошибки  $\epsilon$ , пропорционален  $p^{L+1}$ . Вспоминая, что дистанция кода  $d$  связана с числом корректируемых ошибок  $L$  как  $d = 2L + 1$ , получаем ключевую зависимость для оценки масштабируемости кодов коррекции ошибок:

$$\epsilon \sim p^{(d+1)/2}. \quad (3.10)$$

Такая показательная зависимость логической ошибки от дистанции характеризует эффективность кодов коррекции ошибок, не только для рассматриваемой упрощенной модели ошибок, но и для более сложных шумовых процессов. Именно она демонстрирует способность кода справляться с различными видами ошибок и является критерием его качества.

### 3.2.2 Модель ошибок при численном расчете временной эволюции матрицы плотности

Численное моделирование кодов коррекции квантовых ошибок представляет собой важный инструмент анализа и разработки квантовых алгоритмов. При использовании матрицы плотности для моделирования временной эволюции квантовой системы достигается более полное описание всех значимых процессов в реальных экспериментах. В отличие от других подходов, таких как симуляция волновой функции, данный метод позволяет учитывать взаимодействие с окружающей средой и, следовательно, все связанные процессы декогеренции и диссипации. Это особенно важно для исследования устойчивости квантовых операций к шумам, характерным для современных сверхпроводящих систем. В модели, используемой в данной работе, учитываются амплитудная релаксация, дефазировка, деполяризация и ошибки измерений кубитов, что позволяет правдоподобно приблизить симуляцию к реальному физическому устройству.

Для описания ошибок, возникающих во время выполнения гейтов или бездействия использовалась модель «сэндвича»: до и после операции на каждый из участвующих в ней кубитов действовал канал амплитудного или фазового затухания с параметром затухания, соответствующим половине длительности операции. Этот канал бездействия в терминах матрицы переноса Паули описывается следующим образом:

$$R_{\text{idle}}(t) = R_{\text{AD}}(t)R_{\text{PD}}(t), \quad (3.11)$$

где  $R_{\text{AD}}$  и  $R_{\text{PD}}$  стандартные каналы затухания и дефазировки

$$R_{\text{AD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \gamma_1} & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 1 - \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$R_{\text{PD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \gamma_\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \gamma_\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Здесь параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_\phi$  зависят от времени действия канала и определяются выражениями  $\gamma_1 = 1 - e^{-t/T_1}$ ,  $\gamma_\phi = 1 - e^{-2t/T_\phi}$ , где  $\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\phi}$ .

Кроме того, при выполнении нетривиальных операций для лучшего соответствия с результатами томографии квантовых процессов учитывалась асимметричная деполяризации. Так как реальным вращением, выполняемым на процессоре, является вращение вокруг оси  $Y$  (или  $X$ , с точностью до выбора направления вращения), то к однокубитной ошибке поворота добавляется деполяризующая ошибка сжатия в плоскости вращения  $XZ$  и вдоль оси вращения  $Y$  [107, 108]:

$$R_{\text{dep}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - p_{\text{plane}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - p_{\text{axis}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - p_{\text{plane}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Параметр	Обозначение	Значение
Время релаксации кубита	$T_1$	$30 \mu s$
Время декогеренции кубита	$T_2$	$40 \mu s$
Длительность однокубитных операций	$\tau_1$	$20 \text{ ns}$
Длительность двухкубитных операций	$\tau_2$	$40 \text{ ns}$
Время измерения и инициализации	$t_m$	$600 \text{ ns}$
Деполаризация вдоль оси вращения	$p_{\text{axis}}$	$10^{-4}$
Деполаризация в плоскости вращения	$p_{\text{plane}}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3.2: Параметры используемой модели шума, описывающие ошибки, происходящее во время операций и бездействия кубитов [108–111].

Таким образом, ошибка при бездействии задается матрицей переноса (3.11), а при реальном выполнении гейтов (операция вращения вокруг оси  $Z$  является виртуальной), описывается выражением

$$R_{\text{error}}(G) = R_{\text{idle}}(\tau/2)R_{\text{dep}}R_{\text{ideal}}(G)R_{\text{idle}}(\tau/2). \quad (3.15)$$

Тут  $R_{\text{ideal}}(G)$  и  $R_{\text{error}}(G)$  матрицы Паули описывающие действие унитарного оператора  $G$  в идеальном и зашумленном случае, а  $\tau$  – длительность операции. Параметры шумовой модели представлены в таблице 3.2.

Ошибка происходящая в процессе проективного измерения кубитов моделировалась с помощью вероятностной модели [109, 112]. Она состоит из двух этапов и заключается в следующем. Сначала по матрице плотности вычисляются проекции кубита на состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , а затем случайным образом, в соответствии с полученными вероятностями, определяется состояние  $i \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$ , в которое кубит спроецировался бы в идеальном случае. На втором этапе определяется наблюдаемый результат считывания  $m \in \{+1, -1\}$  и конечное состояние  $o \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$  кубита после процедуры шумного измерения. Идеальное и наблюдаемое конечные состояния связаны друг с другом в соответствии с экспериментально полученными вероятностями  $\epsilon_i^{o,m}$ , приведёнными в таблице 3.3.

Метод численного моделирования на основе матрицы плотности обладает

Вероятность	Значение	Вероятность	Значение
$\epsilon_0^{+1,0}$	0.9985	$\epsilon_1^{+1,0}$	0.0050
$\epsilon_0^{+1,1}$	0.0000	$\epsilon_1^{+1,1}$	0.0015
$\epsilon_0^{-1,0}$	0.0015	$\epsilon_1^{-1,0}$	0.0149
$\epsilon_0^{-1,1}$	0.0000	$\epsilon_1^{-1,1}$	0.9786

Таблица 3.3: Вероятности ошибок чтения состояния [107, 109].

высокой вычислительной сложностью из-за экспоненциального роста размерности вычислительного пространства при увеличении числа кубитов. Это накладывает серьёзные ограничения на симуляцию больших квантовых систем. Однако данный подход остаётся приоритетным для анализа влияния шума в небольших квантовых системах.

### 3.2.3 Феноменологическая модель ошибок

Для численного моделирования матрицы плотности требуется значительный объем вычислительных ресурсов, что делает такие подходы практически нереализуемыми при изучении больших квантовых систем. С целью снижения вычислительной сложности и ускорения моделирования предложены различные приближённые модели, которые, хотя и упрощают физическую природу системы, позволяют воспроизвести ключевые аспекты динамики ошибок. Эти модели находят широкое применение в исследованиях квантовых кодов коррекции ошибок и разработке алгоритмов декодирования.

Одна из самых простых из них – это модель, при которой ошибки происходят с некоторой вероятностью между циклами коррекции. Такое описание подобно тому, что было приведено в разделе 3.2.1, но при этом проводится исправление квантовых ошибок, вывод о возникновении которых делается, опираясь на измерение синдромов. Такая модель является чрезмерно упрощенной, однако она дает возможность понять является ли код коррекции в принципе работоспособным, и применяется при изучении кодов коррекции на системах с сотнями

кубитов.

Более реалистичная модель ошибок включает вероятность возникновения ошибок в ходе цикла коррекции при извлечении синдромов. Эта модель, известная как феноменологическая шумовая модель [113–116], представляет собой абстрактное упрощение более сложной модели шумов на уровне квантовой схемы, в которой каждая операция потенциально может содержать ошибки. Несмотря на свою абстрактность, феноменологическая модель интуитивно понятна и эффективно отражает основные проблемы, возникающие в процессе реализации отказоустойчивых вычислений. Подобный подход позволяет соединить ключевые аспекты реальных шумов и теоретического анализа, что делает феноменологическую модель важным инструментом для начальных этапов исследований в области квантовой коррекции ошибок. В этой модели выделяются два основных типа ошибок.

Первый тип – это ошибки, возникающие на физических кубитах между циклами коррекции ошибок. Эти ошибки проявляются только на изменениях синдромов в ближайшем цикле коррекции и называются пространственноподобными, так как именно по расположению кубитов, синдром которых изменился, определяют тип ошибки. Такие ошибки принято описывать стандартным деполяризационным каналом, действующим независимо и одинаково на каждом кубите. Математически этот процесс записывается как:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - p)\rho + p_x X\rho X + p_y Y\rho Y + p_z Z\rho Z, \quad (3.16)$$

где  $p = p_x + p_y + p_z$  — общая вероятность ошибки, а  $p_x, p_y, p_z$  — вероятности возникновения ошибок  $X, Y, Z$  соответственно.

Второй тип ошибок — это ошибки измерения синдромов. Они обусловлены ошибками, которые произошли в процессе цикла коррекции, включая инициализацию вспомогательных кубитов, шумные квантовые операции и ошибки измерений вспомогательных кубитов. Их принято считать времеподобными ошибками, так как они искажают синдромы конкретного цикла, однако не сказываются на измерениях синдромов в последующих циклах коррекции. Они происходят на вспомогательных кубитах перед измерением их состояния в базисе



$Z$ . Эти ошибки описываются каналом битовой ошибки:

$$\mathcal{E}_{\text{bit}}(\rho) = (1 - q)\rho + qX\rho X, \quad (3.17)$$

где  $q$  — вероятность ошибки. В отличие от деполяризационных, такие ошибки не влияют напрямую на логическое состояние квантовой системы, однако они искажают измеряемые синдромы и существенно усложняют задачу декодирования ошибок.

Важной особенностью феноменологической модели является её сравнительно высокая вычислительная эффективность. Она позволяет избегать трудоёмкого моделирования матрицы плотности. Вместо этого синдромы и ошибки могут быть сгенерированы методом Монте-Карло, что может значительно ускорить вычисления. Тем не менее, основное внимание в данной работе уделяется анализу квантовых схем, сложность которых увеличивается с ростом дистанции. Для такого подхода важно учитывать влияние последовательностей операций, с помощью которых происходит переадресация кубитов. Для эффективного моделирования квантовых схем, содержащих клиффордовские операции и проективные измерения, можно эффективно использовать формализм стабилизаторов, описанный в работе [117].

Оригинальная реализация данного подхода обладает вычислительной сложностью  $O(ng + n^2d + n^2r)$ , где  $n$  — общее число кубитов,  $g$  — количество квантовых операций,  $d$  — число детерминированных измерений, а  $r$  — количество измерений с вероятностным исходом. В настоящем исследовании используется улучшенная реализация метода, доступная в библиотеке Stim [118]. Она обладает оптимизированной сложностью  $O(ng + nd + n^2r)$ , что позволяет эффективно моделировать системы повышенной сложности.

В данной работе модель ошибок описывается симметричным деполяризационным каналом (3.16):  $p_x = p_y = p_z = p/3$ . Вероятность времеподобных ошибок (3.17)  $q$  выбрана равной вероятности деполяризационных ошибок  $p$ , что делает параметры ошибок модели удобными для практических расчётов, так как все они характеризуются одним параметром  $p$ .

### 3.3 Алгоритмы декодирования кодов коррекции ошибок

#### 3.3.1 Постановка задачи и оценка верхней границы точности работы кодов коррекции

Декодер представляет собой алгоритм, который обрабатывает результаты измерений вспомогательных кубитов и вычисляет унитарный оператор  $R$ . Этот оператор применяется к конечному состоянию квантовой системы для восстановления исходного состояния логического кубита. Качество декодирования определяется способностью алгоритма минимизировать ошибки восстановления для заданной модели ошибок или параметров квантового устройства.

Идеальный декодер всегда возвращает такой оператор  $R$ , который обеспечивает максимально возможную величину точности итогового состояния относительно начального состояния. Однако эта точность не может превышать наибольшее собственное значение матрицы плотности конечного состояния, которое и определяет независимый от алгоритма декодирования предел точности алгоритма для конкретной реализации кодов коррекции ошибок.

Используя матрицу плотности конечного состояния информационных кубитов  $\rho$ , можно построить матрицу плотности логического кубита  $\rho_L$  по следующей формуле:

$$\rho_L = \frac{I + \text{Tr}(X_L \rho)X + \text{Tr}(Y_L \rho)Y + \text{Tr}(Z_L \rho)Z}{2}. \quad (3.18)$$

Здесь  $X_L, Y_L, Z_L$  — операторы Паули, относящиеся к логическому кубиту. Эта формула позволяет извлечь информацию о логическом кубите из коллективного состояния физических кубитов, лежащего в подсистеме логического подпространства.

Важно отметить, что верхняя граница точности декодирования определяется исключительно матрицей плотности финального состояния и не зависит от конкретных измерений синдромов ошибок.

### 3.3.2 Подходы к реализации процесса декодирования

Создание надежного и быстрого декодера является одной из сложнейших задач в теории кодов коррекции квантовых ошибок. Цель декодирования заключается в определении наиболее вероятных ошибок, повлиявших на состояние квантовой системы и вызвавших изменения наблюдаемых синдромов. Эффективность декодирования напрямую определяет точность восстановления логического состояния, а следовательно, и качество работы всего кода коррекции.

Одним из наиболее популярных подходов к декодированию синдромов в случае поверхностных кодов является метод поиска паросочетаний во взвешенном графе. При условии, что независимые ошибки возбуждают не более двух элементов синдрома, процесс декодирования можно представить как задачу нахождения оптимального соединения вершин в графе, где каждая вершина соответствует синдрому, а ребра – ошибкам. В рамках такого подхода наиболее вероятная последовательность ошибок определяется с использованием алгоритма поиска паросочетания минимального веса (minimum weight perfect matching, MWPM) [113].

Однако данный метод не подходит для сложных ошибок, например, тех, которые возбуждают более двух синдромов одновременно или изменяют синдромы смешанных типов, так как требует построения графа, сопоставляющего синдромы и ошибки. В таких ситуациях используются другие подходы, например, основанные на принципе максимального правдоподобия распространения ошибок (belief matching) [119]. Тем не менее, применение подобных методов в кодах большой дистанции сталкивается с вычислительными трудностями, обусловленными необходимостью обработки высокоразмерных графовых моделей и большим объёмом данных [120].

Перспективным направлением в декодировании является использование методов машинного обучения, в частности нейронных сетей [121–128]. Основная задача декодирования в данном случае заключается в анализе периодических измерений вспомогательных кубитов и предсказании логических ошибок. Это

сводится к распознаванию закономерностей в числовых последовательностях, что делает искусственные нейронные сети естественным выбором для подобных задач. Поскольку данные, собираемые в ходе экспериментов по коррекции квантовых ошибок, представляют собой временные ряды, рекуррентные нейронные сети (RNN) рассматриваются как наиболее подходящие кандидаты для процедур декодирования.

В данной работе используется архитектура сети с долгой краткосрочной памятью (long short-term memory, LSTM) [129], которая является разновидностью RNN. Она обладает способностью сохранять долгосрочные зависимости и учитывать временной характер входных данных. В последние годы архитектура LSTM успешно применялась в задачах декодирования, демонстрируя высокую эффективность [130, 131].

Особенностью подхода, предлагаемого в данном исследовании, является обучение LSTM-сети на комбинированных данных. Помимо анализа измерений синдромов, сеть тренируется с использованием предсказаний других, более простых алгоритмов декодирования, специализирующихся на различных сценариях проявления ошибок. Такой подход позволяет эффективно сочетать сильные стороны разных методов декодирования: специализированные декодеры быстро и относительно хорошо справляются с конкретными типами ошибок, в то время как нейронная сеть обучается различать случаи их появления и, в конечном итоге, улучшает общий результат декодирования. Такая стратегия позволила повысить эффективность декодирования в сложных случаях ошибок высокого веса и смешанного типа.

### **3.3.3 Модифицированный алгоритм декодирования на основе таблицы поиска**

В качестве предварительного алгоритма декодирования в данной работе используется модификация декодера, основанного на поиске по таблице истинности, обозначаемого как LUT-декодер. Базовый LUT-декодер представляет собой таблицу, которая хранит соответствие между логическими ошибками и синдро-

мами, возникающими из-за ошибок на информационных кубитах. Такой подход эффективен в устранении пространственноподобных ошибок, но не способен справляться с времеподобными ошибками. Для устранения этой проблемы введено понятие «глубина памяти»

Идея заключается в следующем: при декодировании  $k$ -го цикла коррекции, если синдромы в этом цикле не изменились, предполагается, что ошибка не произошла, и алгоритм переходит к следующему циклу. Если же в  $k$ -м цикле имеют место нетривиальные детекторы (измерения синдромов), алгоритм анализирует на следующие  $D$  циклов. Если в этих  $D$  циклах не обнаружено новых нетривиальных детекторов, ошибка в  $k$ -м цикле корректируется согласно таблице поиска. В противном случае синдром  $k$ -го цикла добавляется к детекторам  $(k + 1)$ -го цикла, а исправление откладывается на следующий цикл.

Параметр  $D$  называется «глубиной памяти». Так, при  $D = 0$  память отсутствует, что соответствует базовому LUT-декодеру. При  $D = 1$  декодер эффективно корректирует ошибки измерений, а при  $D = 2$  — с ситуациями, когда две последовательные ошибки измерений приводят к занулению синдрома. Основным недостатком этого метода состоит в том, что накопление синдромов может увеличивать вероятность пространственноподобных ошибок, снижая эффективность таблицы поиска. Однако это компенсируется возможностью создания нескольких быстрых декодеров, способных обрабатывать различные сценарии ошибок, что упрощает процесс принятия решений нейронной сетью. Для обозначения глубины памяти LUT-декодера используется запись  $D$  в скобках, например, LUT(1), что соответствует  $D=1$ .

Математически концепция глубины памяти LUT-декодера  $D$  формализуется как техника предобработки данных. Изменения синдромов  $s_j^i$  определяются следующим образом:

$$s_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 1, \\ m_j^i - m_{j-1}^i \mod 2, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.19)$$

где  $m_j^i$  — результаты измерений вспомогательных кубитов с номером  $i = 1, \dots, n$  после цикла с номером  $j = 1, \dots, k$ , принимающие значения 0 или 1. Соот-

ветственно, процесс предобработки синдромов может быть описан следующим алгоритмом:

```

for  $j \leq k$  do
  if  $\sum_i s_j^i \neq 0$  and  $\sum_{k=1}^D \sum_i s_{j+k}^i \neq 0$  then
    for  $i \leq n$  do
       $s_{j+1}^i \leftarrow (s_j^i + s_{j+1}^i) \bmod 2$ 
       $s_j^i \leftarrow 0$ 
    end for
  end if
end for

```

### 3.3.4 Архитектура нейронного декодера

Итак, теперь в качестве входных данных для нейронной сети используются не только необработанные результаты измерений стабилизаторов, но также предсказания двух LUT декодеров с различными значениями глубины памяти,  $D = 1$  и  $D = 2$ .

Архитектура нейронной сети включает  $L$  слоев LSTM, каждый из которых имеет скрытую размерность  $S_1$ . Эти слои обеспечивают способность модели учитывать временные зависимости в данных. После LSTM слоев следуют два линейных слоя с размерностями  $S_1 \rightarrow S_2$  и  $S_2 \rightarrow S_2$ , между которыми используется функция активации ReLU для добавления нелинейности. Заключительный линейный слой преобразует данные из размерности  $S_2$  в слой размерности 4, что соответствует четырем возможным исправлениям состояния логического кубита с помощью операторов Паули:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  или  $I$  (соответствующего отсутствию ошибки).

Для преобразования выходных данных нейронной сети в вероятности используется многопеременная логистическая функция (softmax). Функция потерь определяется как отрицательный логарифм правдоподобия, сравнивающий предсказанное исправление ошибки с текущим логическим состоянием кубита.

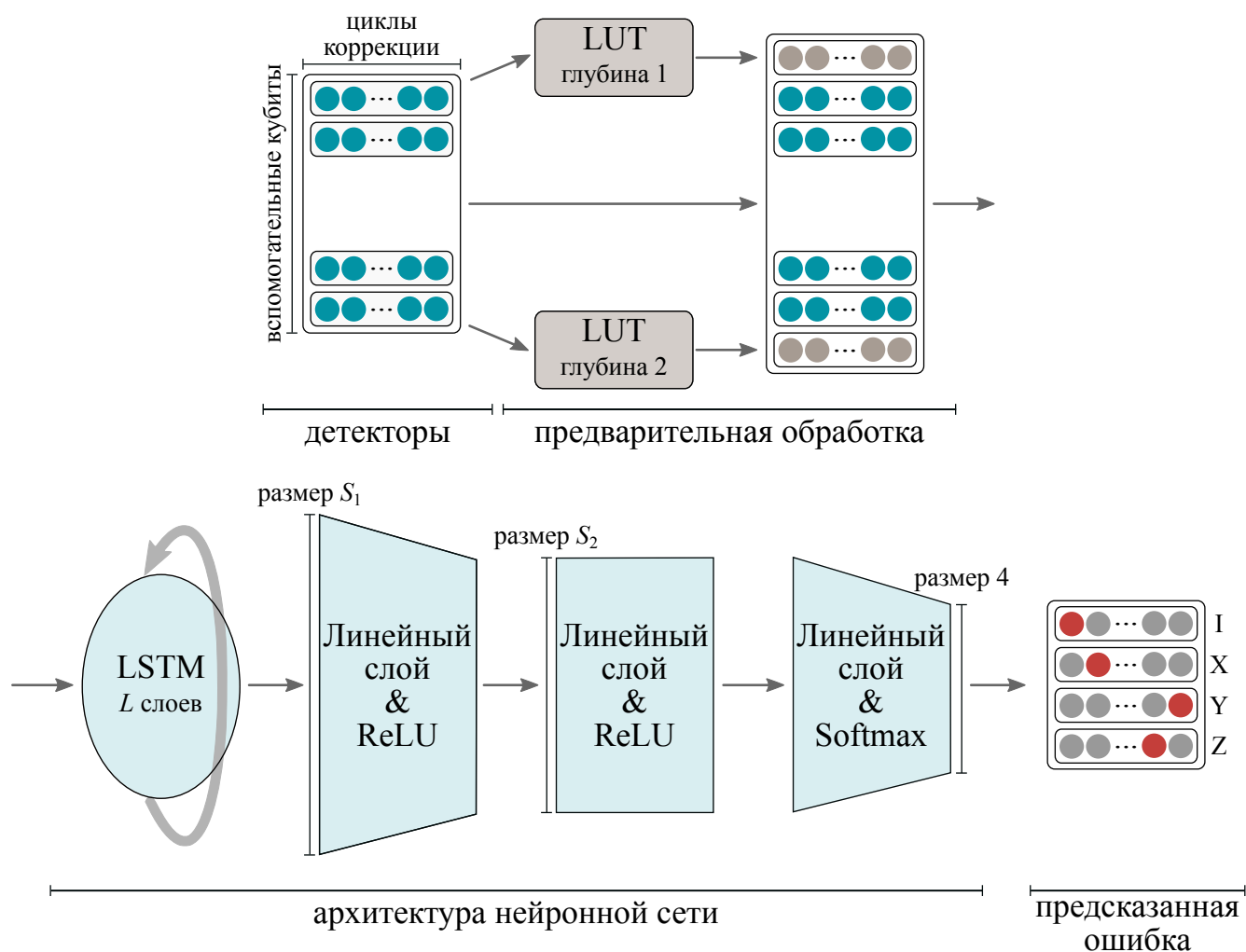


Рисунок 3.6: Алгоритм декодирования с использованием рекуррентной нейронной сети. Необработанные результаты измерений вспомогательных кубитов, полученные в процессе эксперимента с квантовой памятью, преобразуются в детектирующие события. Далее эти события проходят обработку двумя декодерами на основе таблицы поиска с глубинами памяти  $D = 0$  и  $D = 1$ . После этого сформированные данные подаются на вход нейронной сети, которая рассчитывает вероятности различных ошибок и определяет наиболее вероятное исправление логического состояния.

Полный процесс декодирования, включая использование предсказаний LUT-декодеров и архитектуру нейронной сети, представлен на рисунке 3.6.

## 3.4 Результаты численного моделирования

### 3.4.1 Анализ эффективности пятикубитного кода

Численное исследование эффективности циклического кода начнем с моделирования работы пятикубитного кода в модели ошибок, действующих на матрицу плотности. Для этого была проведена численная симуляция эксперимента по хранению квантового состояния. Для каждого из шести начальных состояний ( $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ ,  $|i+\rangle$ ,  $|i-\rangle$ ) было сгенерировано 10 000 независимых траекторий с различными результатами измерений вспомогательных кубитов. На основе этих данных были рассчитаны матрицы плотности, описывающие состояние логического кубита, и определена верхняя граница точности восстановления начального состояния.

Зависимость полученной точности от числа циклов коррекции или от времени, что по сути то же самое, аппроксимирована выражением [107]:

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon)^{t-t_0}, \quad (3.20)$$

где  $F(t)$  — средняя точность восстановленных состояний,  $\epsilon$  — вероятность возникновения ошибок за 1 мкс, а  $t$  — время в мкс. Параметры аппроксимации  $\epsilon$  и  $t_0$  были найдены методом наименьших квадратов. Численные значения скорости затухания логического кубита  $\epsilon$  приведены в таблице 3.4.

Результаты моделирования демонстрируют, что точность восстановления квантового состояния для всех шести конфигураций различается незначительно, что соответствует ожидаемым свойствам пятикубитного кода. Усредненные результаты по шести начальным состояниям в эксперименте по хранению квантовой информации приведены на рисунке 3.7.

Кроме того, выполнено сравнение точности восстановления состояния логического кубита с динамикой одиночного кубита, подверженного затуханию с временами релаксации и когерентности  $T_1$  и  $T_2$ . В этом случае средняя точность



Начальное состояние	Вероятность логической ошибки $\epsilon$ за 1 мкс	
	Циклический 5-кубитный	Поверхностный 17-кубитный
$ 0\rangle$	$0.644 \pm 0.006$	$0.604 \pm 0.005$
$ 1\rangle$	$0.629 \pm 0.006$	$0.621 \pm 0.005$
$ +\rangle$	$0.675 \pm 0.002$	$0.466 \pm 0.007$
$ -\rangle$	$0.665 \pm 0.004$	$0.442 \pm 0.004$
$ i+\rangle$	$0.638 \pm 0.003$	$1.143 \pm 0.020$
$ i-\rangle$	$0.623 \pm 0.005$	$1.123 \pm 0.015$
Среднее значение	$0.646 \pm 0.005$	$0.703 \pm 0.009$

Таблица 3.4: Верхняя граница вероятности логической ошибки  $\epsilon$ , для шести начальных состояний в 5-кубитном циклическом коде коррекции ошибок и коде 17-кубитном порвехностном коде.

по шести начальным состояниям определяется выражением:

$$F_{\text{single}}(t) = \frac{1}{6} \left( 1 + e^{-t/T_1} \right) + \frac{1}{3} \left( 1 + e^{-t/T_2} \right). \quad (3.21)$$

Для сравнения эффективности пятикубитного кода с другими методами коррекции ошибок выполнена симуляция 17-кубитного поверхностного кода в этой же модели ошибок. Зависимость верхней границы точности восстановления логического состояния от времени для 17-кубитного кода, усреднённая по шести начальным состояниям, представлена на рисунке 3.7. В Таблице 3.4 также приведены скорости затухания для каждого из шести состояний. В отличие от пятикубитного кода, у 17-кубитного поверхностного кода наблюдается существенное различие в скорости затухания логического кубита, инициализированного в разных начальных состояниях. Наибольшее отклонение демонстрируют состояния, ориентированные вдоль оси  $Y$ , поскольку их стабилизация в поверхностном коде требует участия вспомогательных кубитов обоих типов.

Исследуя коды коррекции квантовых ошибок ключевой интерес представляет поведение вероятности логической ошибки в зависимости от уровня физических ошибок. Именно по этой зависимости можно определить какое коли-

чество ошибок за цикл коррекции код способен исправлять. Для выполнения подобного исследования модель ошибок была упрощена до релаксации и декогеренции, описываемыми временами  $T_1$  и  $T_2$ . При этом учитывалось, что кубиты подвергаются процессам релаксации и дефазировки не только между циклами коррекции при измерении вспомогательных кубитов, но и в течение всего цикла коррекции. Выполненный численный эксперимент по хранению квантового состояния для различных значений  $T_1$  (при допущении  $T_2 = T_1$ ) позволил оценить сверху величину характеризующую скорость накопления логических ошибок  $\epsilon$ .

При исследовании кодов коррекции квантовых ошибок ключевой интерес представляет анализ зависимости вероятности логической ошибки от уровня физических ошибок. Эта зависимость позволяет определить, какое количество ошибок за цикл коррекции код способен исправлять. Для проведения такого анализа использовалась модель ошибок, учитывающая процессы релаксации и декогеренции, характеризующихся временами  $T_1$  и  $T_2$ . При этом учитывалось, что квантовые состояния подвергаются релаксации и дефазировке не только в промежутках между циклами коррекции, когда измеряются вспомогательные кубиты, но и в течение всего цикла коррекции. Численный эксперимент по хранению квантового состояния для различных значений  $T_1$  ( для простоты представления данных было выбрано  $T_2 = T_1$ ) позволил оценить верхнюю границу скорости накопления логических ошибок  $\epsilon$ .

Полученные результаты представлены на рисунке 3.8. Для аппроксимации данных использовалась модель, описанная в разделе 3.2.1. В случае кода коррекции, исправляющего не более одной ошибки за цикл, выражение для вероятности логической ошибки (3.9) принимает вид:

$$\epsilon = 1 - [(1 - p)^N + Np(1 - p)^{N-1}] , \quad (3.22)$$

где  $p$  — вероятность возникновения ошибки на физическом уровне, а  $N$  — число кубитов в коде. При малых значениях  $p$  это выражение можно разложить в ряд:

$$\epsilon = \frac{(N - 1)N}{2} p^2 + \mathcal{O}(p^3). \quad (3.23)$$

Поскольку пятикубитный код исправляет не более одной ошибки за цикл,

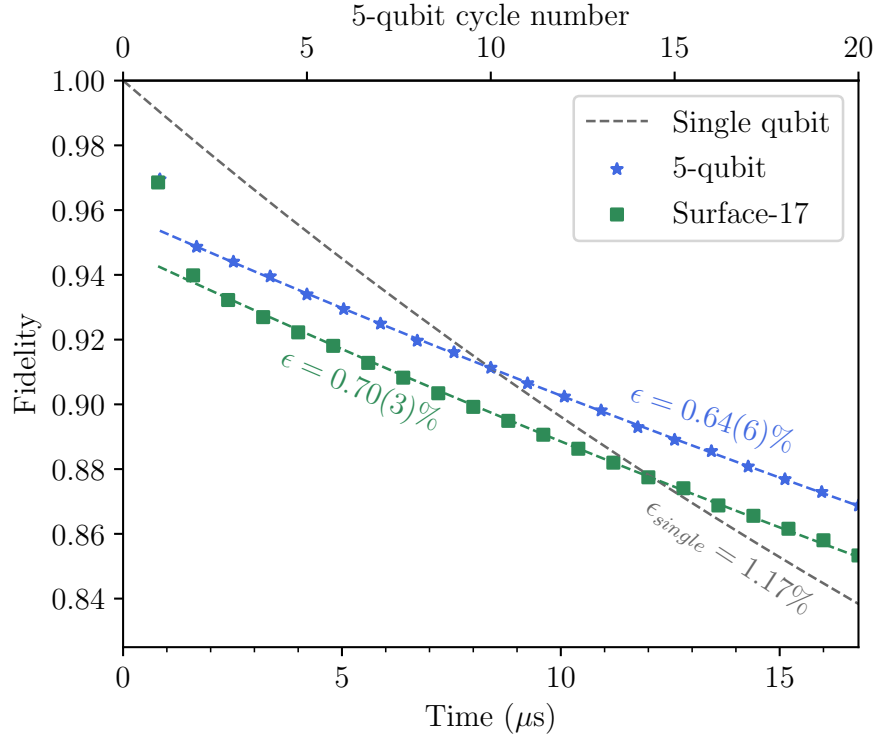


Рисунок 3.7: Верхние границы точности восстановления логического состояния для кодов коррекции ошибок: пятикубитного (синий) и 17-кубитного (зеленый), усредненные по шести начальным состояниям  $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |i+\rangle, |i-\rangle$ , рассчитанные методом численного моделирования эволюции матрицы плотности. Серая кривая соответствует средней точности сохранения состояния одного физического кубита.

зависимость вероятности логической ошибки следует аппроксимировать квадратичной зависимостью (3.23), принимая  $p$  пропорциональным  $\exp(-t/T_1)$  с некоторым коэффициентом  $\beta$ . Полученное значение параметра  $\beta$  равно 0.44. Видно, что теоретическая кривая хорошо согласуется с численными данными при  $T_1 \geq 20$  мкс. При меньших значениях  $T_1$  наблюдаются расхождения, что объясняется ограниченной применимостью модели при больших значениях  $p$ . Кроме того, сравнение выражений (3.20) и (3.21) при  $T_1 = T_2$  показывает, что вероятность логической ошибки за 1 мкс определяется как  $\epsilon = 0.5 \exp(-1/T_1)$ , где  $T_1$  выражается в микросекундах. Таким образом, полученное значение коэффициента  $\beta$  оказывается близким к этой теоретической оценке.

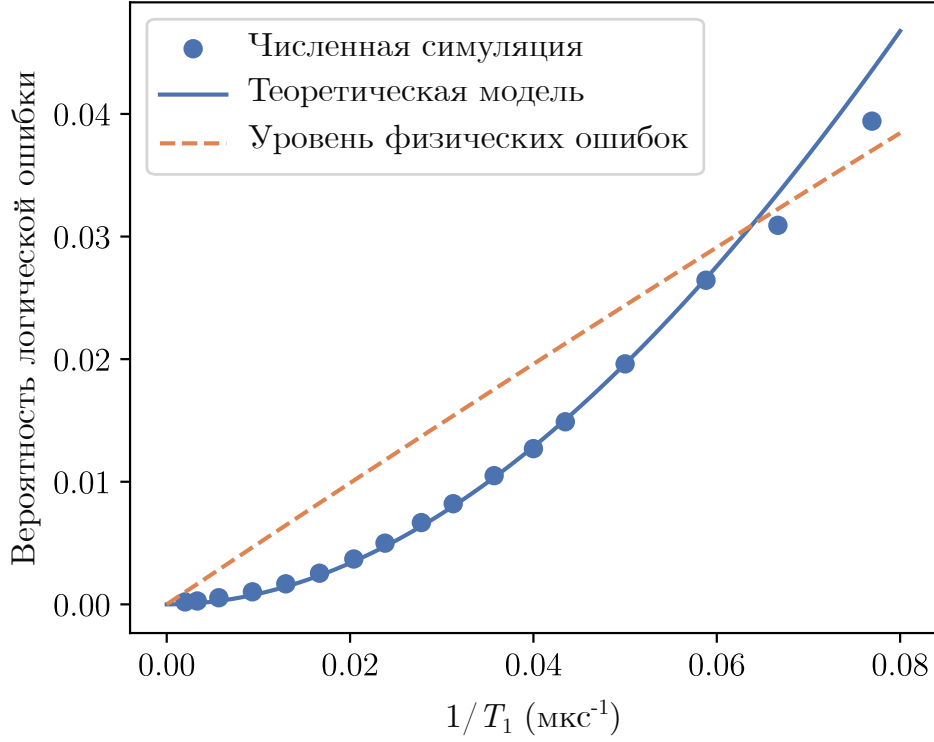


Рисунок 3.8: Зависимость логической ошибки  $\epsilon$  для пятикубитного кода от времен релаксации и дефазировки ( $T_1 = T_2$ ) физических кубитов, усредненная по трем начальным состояниям  $|0\rangle, |+\rangle, |i+\rangle$ . Синие точки представляют данные, рассчитанные с помощью численного моделирования эволюции матрицы плотности; синяя кривая — их аппроксимация уравнением 3.22; оранжевая линия соответствует уровню физической ошибки физического кубита.

### 3.4.2 Исправление ошибок для произвольного начального состояния

В предыдущем разделе была проведена численная оценка верхней границы эффективности произвольного алгоритма декодирования в рамках заданной модели ошибок. Однако для полной оценки эффективности кода коррекции ошибок необходимо продемонстрировать, что коррекция ошибок может осуществляться непосредственно на основе измерений вспомогательных кубитов. Для этого требуется реализовать конкретный декодирующий алгоритм.

Для пятикубитного кода в данной работе разработан декодер, основанный на рекуррентных нейронных сетях. Обучающий набор данных включает результаты измерений вспомогательных кубитов, полученные в ходе численной

симуляции, а также результаты считывания итоговых состояний информационных кубитов. Нейронная сеть обучается одновременно на трех наборах данных, соответствующих трем начальным состояниям  $\{|+\rangle, |i+\rangle, |0\rangle\}$ ; каждый набор содержит 1 200 000 результатов считывания. Эффективность декодера тестируется на 450 000 траекториях, для тех же начальных состояний, что использовались при обучении. В отличие от процесса обучения, при тестировании конечное логическое состояние не измеряется, а рассчитывается из матрицы плотности информационных кубитов по формуле (3.18). Точность восстановления состояния, достигнутая с помощью нейронного декодера, представлена на рисунке 3.9 (фиолетовая кривая), а полученная скорость накопления логических ошибок приведена в Таблице 3.5.

Тем не менее, цель коррекции квантовых ошибок заключается не только в восстановлении состояний, сонаправленных с координатными осями на сфере Блоха, но и произвольных квантовых состояний. Для оценки работы декодера в этом сценарии была исследована его эффективность при восстановлении произвольного чистого состояния логического кубита вида  $\alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$ . Это состояние кодируется в  $\alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle$  с использованием схемы, представленной на рисунке 3.10, при этом предполагается, что процесс кодирования не содержит ошибок. После инициализации выполняется численный эксперимент по сохранению начального квантового состояния, а восстановленная матрица плотности логического кубита сравнивается с предсказанием нейронного декодера.

Этот процесс был выполнен для 17 000 различных начальных состояний, равномерно распределённых по сфере Блоха. Средняя вероятность верного восстановления логического состояния представлена на рисунке 3.9 (розовая кривая). Полученные результаты демонстрируют, что значение  $\epsilon$  практически совпадает с соответствующим значением для состояний, сонаправленных с координатными осями (см. таблицу 3.5), тем самым подтверждая эффективность нейронного декодера.

Вероятность ошибки $\epsilon$ за 1 мкс	
Начальное состояние	Нейронный декодер
$ 0\rangle$	$0.88 \pm 0.01$
$ +\rangle$	$1.03 \pm 0.01$
$ i+\rangle$	$1.05 \pm 0.01$
Среднее по состояниям $ 0\rangle,  +\rangle,  i+\rangle$	$0.99 \pm 0.01$
Произвольное состояние	$0.993 \pm 0.003$

Таблица 3.5: Вероятности логической ошибки  $\epsilon$  для нейросетевого декодера, представленного на рисунке 3.9, для различных начальных состояний.

Ошибка оценена методом  $k$ -кратной кросс-валидации при  $k = 5$

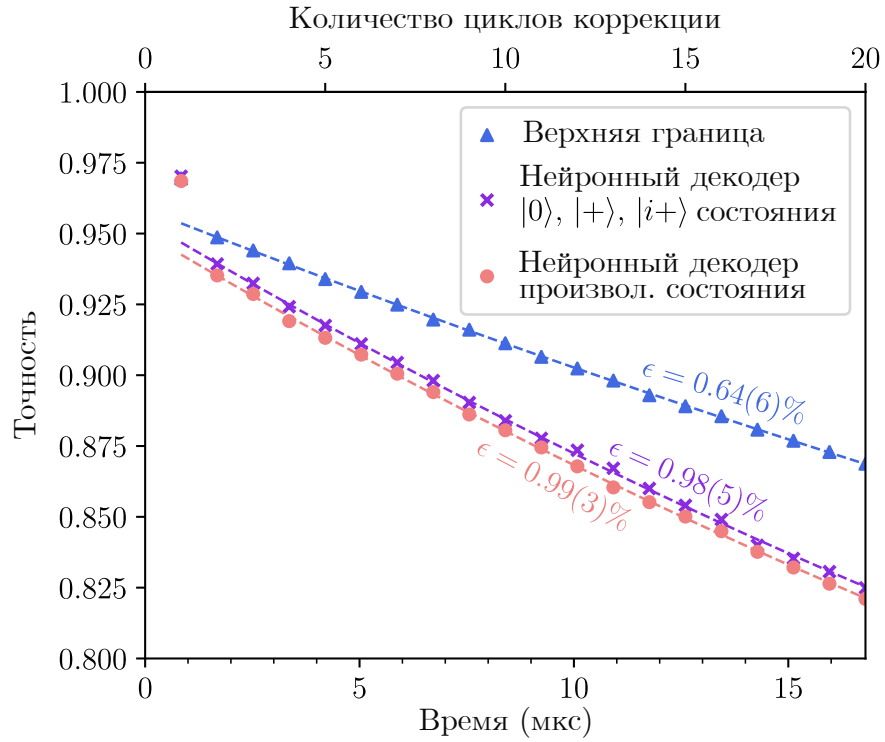


Рисунок 3.9: Сравнение точности восстановленного состояния логического кубита в пятикубитном коде коррекции ошибок для идеального декодера (верхняя граница) и нейросетевого декодера, примененного к трем начальным состояниям  $|0\rangle, |+\rangle, |i+\rangle$  и произвольным равномерно распределенным чистым состояниям.

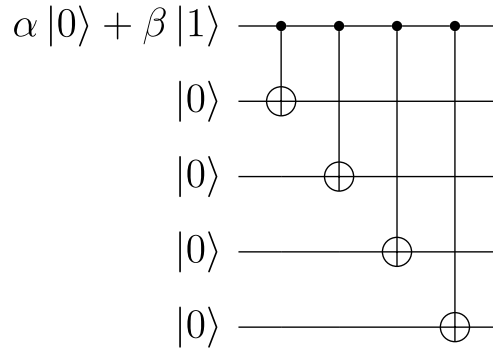


Рисунок 3.10: Квантовая схема приготовления произвольного начального логического состояния, состоящая из четырех операций CNOT, которая кодирует состояние  $\alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$  в  $\alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle$ .

### 3.4.3 Подавление ошибок при масштабировании

После подробного исследования работоспособности пятикубитного кода логично перейти к анализу его свойств при масштабировании. Для этого было выполнено численное моделирование экспериментов по хранению квантового состояния, аналогичное описанному в предыдущих подразделах, но с учетом изменения, заключающегося в использовании феноменологической модели ошибок. Так как в моделировании рассматривается эволюция чистого состояния, определить границу точности кода методом вычисления наибольшего собственного значения матрицы плотности логического кубита невозможно. Вместо этого необходимо корректировать ошибку с помощью алгоритма декодирования и определять точность восстановленного состояния.

В работе используется алгоритм декодирования на основе нейронной сети, описанный в подразделе 3.3.4. В качестве обучающего набора данных для декодера было сгенерировано  $1.5 \cdot 10^6$  траекторий эволюции логического кубита при вероятности ошибки  $p = 0.01$ . Логический кубит инициализировался в трех различных базисах:  $Z$ ,  $X$  и  $Y$ . Оптимизированные методом поиска по сетке гиперпараметры нейронной сети  $L$ ,  $S_1$  и  $S_2$  для каждого значения дистанции кода представлены в таблице 3.6.

Для тестирования эффективности циклических кодов эксперимент по хранению квантового состояния был проведен  $3 \cdot 10^6$  раз при различных вероятностях ошибки  $p$  на физических кубитах. Логический кубит инициализировался

Дистанция кода	Слои LSTM	Размер $S_1$	Размер $S_2$
3	2	256	128
5	3	256	128
7	4	256	128
9	5	512	256

Таблица 3.6: Параметры нейронной сети (рисунок 3.6), используемые в данной работе.

в трех различных базисах ( $Z, X, Y$ ) и хранился в течение 50 циклов коррекции ошибок. Полученные данные были аппроксимированы функцией [10, 107]:

$$F(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon)^{n-n_0}, \quad (3.24)$$

где  $n$  — количество циклов коррекции,  $\epsilon$  — вероятность логической ошибки за один цикл коррекции, а точность восстановления состояния логического кубита  $F(n)$  определяется как доля правильно восстановленных состояний. Параметры  $\epsilon$  и  $n_0$  вычислены по методу наименьших квадратов.

Описанным методом была получена вероятность логической ошибки  $\epsilon$  для различных расстояний предложенного кода в зависимости от вероятности физической ошибки  $p$ , что иллюстрируется на рисунке 3.11. Поскольку код квантовой коррекции ошибок с дистанцией  $d$  способен исправлять до  $(d-1)/2$  независимых ошибок на физических кубитах, связь между этими параметрами описывается степенным законом:

$$\epsilon \sim p^{(d+1)/2}. \quad (3.25)$$

Наклон графика совпадает с ожидаемым значением  $(d+1)/2$ . Это подтверждает способность кода исправлять требуемое число ошибок, соответствующее заявленной дистанции, в рамках выбранной модели ошибок и применяемого алгоритма декодирования.



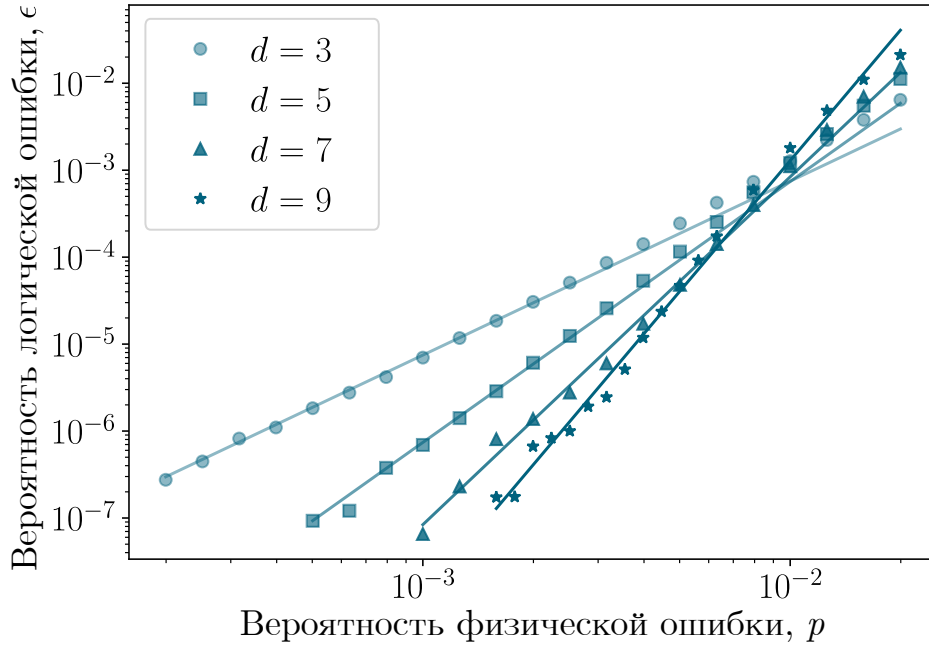


Рисунок 3.11: Вероятность логической ошибки циклического кода в зависимости от вероятности физической ошибки  $p$ . Линии показывают аппроксимацию результатов моделирования при логической ошибке ниже  $10^{-4}$  с использованием формулы (3.25).

#### 3.4.4 Эффективность нейронного декодера

В завершение исследования следует остановиться на вопросе эффективности нейронного декодера и оценить, насколько его результаты улучшаются благодаря данным, полученным от других алгоритмов декодирования. Наиболее наглядно анализировать это для кодов большой дистанции, где проявляется сложность задачи: требуется обрабатывать синдромы значительного веса, и отвечающие ошибкам различной чётности по  $X$  и  $Z$ , что делает их декодирование более трудоёмким.

Для количественной оценки выполнено сравнение нейронного декодера, работающего с LUT декодерами с разной глубиной памяти и классическим декодером на примере циклического кода с  $d = 7$ . На рисунке 3.12 представлены зависимости вероятности логической ошибки  $\epsilon$  от физической ошибки  $p$  для следующих методов:

- Нейронный декодер, обученный только на измерениях детекторов без использования дополнительных декодеров (закрашенные ромбы);

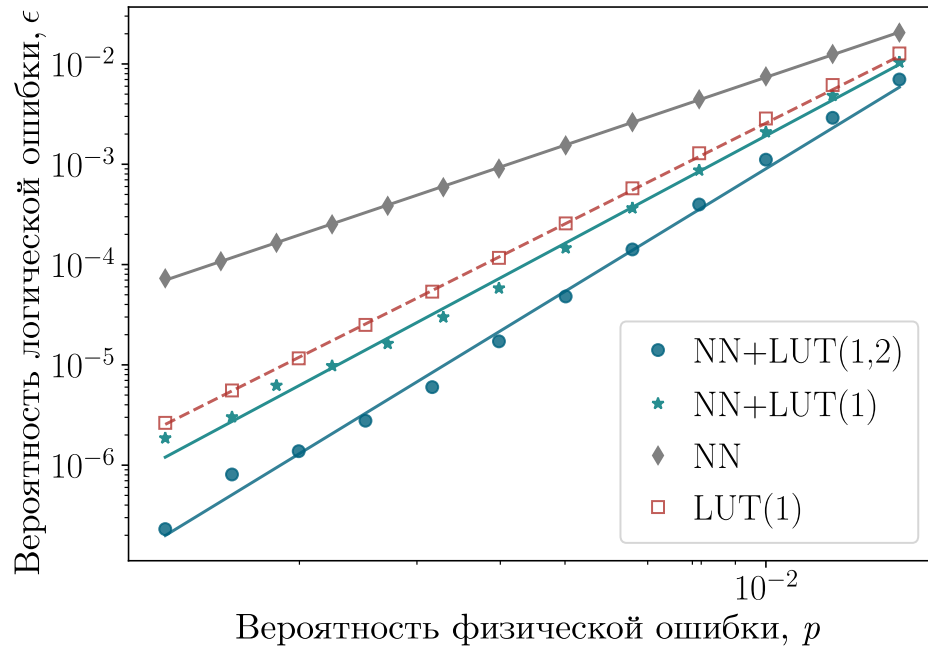


Рисунок 3.12: Вероятность логической ошибки циклического кода дистанции 7 в зависимости от вероятности физической ошибки  $p$  для различных алгоритмов декодирования. Закрашенные кружки соответствуют результатам, полученным с помощью нейронной сети, обученной на измерениях детекторов и предсказаниях двух таблиц поиска (LUT) с глубиной памяти  $D = \{1, 2\}$ , закрашенные звезды – на измерениях детекторов и предсказания таблицы поиска с глубиной памяти 1, а закрашенные ромбы – только на детекторах. Пустые квадраты показывают лучший результат работы декодера на основе таблицы поиска среди разных глубин памяти. Линии показывают линейную аппроксимацию результатов моделирования в логарифмическом масштабе.

- Нейронный декодер, обученный на измерениях детекторов и предсказаниях одного LUT декодера ( $D = 1$ ) (закрашенные звезды);
- Нейронный декодер, обученный на измерениях детекторов и предсказаниях двух LUT-декодеров ( $D = 1, 2$ ) (закрашенные кружки);
- Лучший результат для LUT декодера, оптимизированного по параметру глубины памяти ( $D = 1$ ) (пустые красные квадраты).

Видно, что нейронная сеть, не использующая дополнительные данные, демонстрирует более высокую вероятность логической ошибки по сравнению даже

с LUT декодером. Нейронная сеть, работающая с необработанными данными и исключительно с результатами LUT(1), показывает лишь незначительное улучшение по сравнению с самим LUT(1). Однако сочетание нейронной сети с двумя различными LUT декодерами демонстрирует существенно более высокую эффективность, значительно превосходя производительность метода, использующего только один LUT декодер. Преимущество этого подхода проявляется в том, что только он из представленных на рисунке методов декодирования обеспечивает необходимый коэффициент наклона зависимости, равный 4, что соответствует заявленной дистанции кода  $d = 7$ .

Объяснить различия в работе нейронных декодеров можно следующим образом: если учитывать только те исправления, для которых предсказания LUT(1) и LUT(2) совпадают, а все остальные данные отбрасывать, то коэффициент угла наклона прямой в логарифмическом масштабе также окажется равным 4. То есть совместно два декодера могут обнаружить заявленное число ошибок. Однако нейронная сеть справляется с данной задачей более эффективно, так как обрабатывает даже те случаи, в которых предсказания декодеров расходятся. Это подтверждает высокую адаптивность нейронной сети и ее способность учитывать сложные зависимости, что делает её важным инструментом для работы с кодами коррекции ошибок большой дистанции.

Описанные результаты демонстрируют, что гибридный подход, сочетающий предсказания LUT-декодеров с нейронной сетью, обеспечивает заметное снижение вероятности логической ошибки  $\epsilon$  по сравнению с методами, использующими только измерения синдромов или отдельные LUT-алгоритмы. Это подтверждает, что интеграция разных декодеров позволяет нейронной сети эффективно выявлять сложные корреляции между временноподобными и пространственноподобными ошибками, даже при наличии сложных синдромов.

### 3.5 Выводы по главе

В данной главе предложен эффективный с точки зрения количества кубитов способ масштабирования пятикубитного кода на небольших дистанциях для

реалистичной архитектуры сверхпроводникового процессора. Квантовая схема кода может быть реализована при последовательном соединении кубитов в замкнутую цепочку с возможностью выполнения двухкубитных операций *i*SWAP и SWAP между соседними кубитами. Общее число физических кубитов, необходимое для реализации кода, линейно масштабируется с ростом его дистанции, что делает его одним из наиболее компактных среди известных квантовых кодов. Для современных квантовых процессоров, содержащих несколько десятков кубитов, это свойство является важным преимуществом, позволяющим экспериментально реализовать методы коррекции ошибок. Однако предложенный код не является масштабируемым в традиционном смысле, поскольку увеличение его расстояния сопровождается увеличением веса стабилизаторов, что ограничивает его эффективность при больших дистанциях.

Кроме того, разработан алгоритм декодирования квантовых ошибок, основанный на архитектуре рекуррентной нейронной сети. Его ключевая особенность заключается в комбинированной предварительной обработке данных с использованием табличного декодера. Проведенный анализ точности логических операций в предположении феноменологической модели ошибок показал экспоненциальное снижение вероятности логической ошибки с увеличением расстояния кода при использовании предложенного декодера. Также продемонстрирована его эффективность в условиях наличия неразделимых синдромов ошибок  $X$  и  $Z$  и увеличенного веса стабилизаторов.

Одним из ключевых направлений дальнейшего развития циклических кодов является оптимизация квантовой схемы за счет добавления флаговых кубитов, которые позволяют детектировать ошибки цепного типа, возникающие в процессе коррекции. Кроме того, важным аспектом является экспериментальное исследование доминирующих каналов ошибок, возникающих при выполнении операций *i*SWAP. Работа в этих направлениях позволит повысить устойчивость предложенного кода и улучшить его практическую применимость. Полученные результаты изложены в публикациях [132, 133].

В более широком контексте предложенный код интересен возможностью использования переадресуемых вспомогательных кубитов, которые фактически

перемещаются по квантовой схеме и запутываются не только с соседними, но и с удаленными информационными кубитами. Подходы, основанные на динамической перенастройке схемы, уже продемонстрировали свою эффективность: в конце 2024 года исследователи Google реализовали несколько версий динамического поверхностного кода, в которых кубиты перемещались по схеме, обеспечивая коррекцию ошибок [134]. Эта работа показала, что динамические схемы могут удовлетворять требованиям к отказоустойчивости и открывают новые перспективы для масштабируемых квантовых вычислений. В этом контексте предложенный в данной работе подход к построению циклических кодов представляет собой перспективное направление, объединяющее адаптируемость к связности квантового процессора с эффективностью коррекции ошибок при сравнительно небольшом числе физических кубитов.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Впервые предложен метод реализации двухкубитной квантовой операции на сверхпроводниковых кубитах-флаксоунах с помощью микроволнового возбуждения дополнительного связующего кубита, частота которого зависит от вычислительного состояния системы. Выполнены аналитический расчёт и численное моделирование двух вариантов выполнения операции: резонансного и околорезонансного. Преимуществами данного подхода являются:
  - простота реализации, так как фактически двухкубитная операция сводится к однокубитному гейту на соединительном кубите;
  - сохранение кубитов в оптимальных по потоку точках в течение всей операции, что обеспечивает высокие времена когерентности;
  - возможность масштабирования подхода для выполнения многокубитных операций, например трёхкубитной операции CCZ.
2. Экспериментально реализована предложенная двухкубитная операция на кубитах-флаксоунах с точностью 97,6 % и длительностью 44 нс. Для оценки её качества применены методы перекрёстно-энтропийного тестирования и томографии квантового процесса.
3. Предложен метод коррекции квантовых ошибок, использующий динамическую переадресацию физических кубитов, что позволило эффективно масштабировать пятикубитный код на архитектуре с циклической связностью.
4. Разработан и исследован алгоритм декодирования квантовых ошибок на основе искусственных нейронных сетей. Его основные преимущества:
  - способность исправлять ошибки в кодах коррекции со стабилизаторами высокого веса и смешанного типа, отвечающими одновременно битовым и фазовым ошибкам;
  - возможность обучения на данных, полученных непосредственно с

конкретного устройства, что важно в случае отклонения реального характера ошибок от теоретических моделей;

- независимость от конкретного кода коррекции, что делает алгоритм универсальным для различных типов квантовых кодов и архитектур процессоров.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Алексею Валентиновичу Устинову за возможность работать в научной группе «Сверхпроводниковые кубиты и квантовые схемы» Российского квантового центра, доброжелательное и внимательное руководство, поддержку самых амбициозных и сложных идей, а также за помощь в освоении профессионального общения с научными коллективами и административными сотрудниками, что, как оказалось, является неотъемлемой частью работы исследователя.

Автор благодарит коллег, чья помощь и участие сделали возможным выполнение исследований, вошедших в эту диссертацию.

Во-первых, автор выражает благодарность Илье Беседину за неоценимый вклад в становление автора как научного сотрудника, формировании базовых принципов научной работы, критериев, формулирования и представления результатов. Поблагодарить за то что помог сделать первые шаги в науке, рассказал о том как работают кубиты, следил и наставлял за правильностью выполнения численных расчетов, наставлял и делился идеями экспериментов и помог погрузиться в тему коррекции квантовых ошибок и предложил тему работы и помогал находить решения даже самых трудных задач.

Во-вторых, Илье Москаленко за вовлечение в свои проекты по кубитам-флаксонам, за то, что рассказал о физических принципах работы этого типа кубитов и научил проводить экспериментальные исследования на сверхпроводниковых устройствах. Опыт, полученный в этих проектах, лёг в основу данной работы. Кроме того, автор благодарит за предоставленный двухкубитный об-

разец, который стал ключевым элементом экспериментов.

В-третьих, Григорию Мажорину, с которым автор прошёл путь от бакалавриата до окончания аспирантуры, за многочасовые обсуждения задач, множество совместных измерений и интересных проектов, придуманных и реализованных вместе.

В-четвертых, Николаю Абрамову, Елене Егоровой, Алене Казьминой и Татьяне Чудаковой за помощь, полезные советы и поддержку в те моменты, когда «всё не работает», и есть опасения не успеть всё «сделать за два дня».

В-пятых, Арине Зотовой, Артёму Полянскому, Андрею Кугуту, Николаю Берёзкину и Татьяне Емельяновой за интересные вопросы, которые заставляли взглянуть на задачи под новым углом, и за обсуждения, дававшие много пищи для размышлений.

В-шестых, Илье Родионову, Дмитрию Москалёву, Анастасии Пищимовой, Никите Смирнову и Евгению Зикий за изготовление двухкубитного образца, использованного в экспериментальной части работы.

Наконец, автор выражает признательность Надежде Санниковой за неизмеримый вклад в работу научной группы, неиссякаемую позитивную энергетику, всестороннюю поддержку проектов автора и оперативную помощь в решении всех организационных и административных вопросов.



## Список литературы

- [1] Shor Peter W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science / Ieee. — 1994. — P. 124–134.
- [2] Shor Peter W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer // SIAM review. — 1999. — Vol. 41, no. 2. — P. 303–332.
- [3] Calderbank A. R., Shor Peter W. Good quantum error-correcting codes exist // Physical Review A. — 1996. — Vol. 54, no. 2. — P. 1098–1105.
- [4] Steane A. M. Error correcting codes in quantum theory // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 793–797.
- [5] Gottesman Daniel. Theory of fault-tolerant quantum computation // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 57. — P. 127–137.
- [6] Arute Frank, Arya Kunal et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. — 2019. — Vol. 574, no. 7779. — P. 505–510.
- [7] Wu Yulin, Bao Wan-Su et al. Strong quantum computational advantage using a superconducting quantum processor // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Vol. 127. — P. 180501.
- [8] Morvan A., Villalonga B. et al. Phase transitions in random circuit sampling // Nature. — 2024. — Vol. 634, no. 8033. — P. 328–333.
- [9] Gao Dongxin, Fan Daojin et al. Establishing a new benchmark in quantum computational advantage with 105-qubit Zuchongzhi 3.0 processor // Phys. Rev. Lett. — 2025. — Vol. 134. — P. 090601.

- [10] Chen Zijun, Satzinger Kevin J et al. Exponential suppression of bit or phase errors with cyclic error correction // *Nature*. — 2021. — Vol. 595, no. 7867. — P. 383–387.
- [11] Acharya Rajeev, Aleiner Igor et al. Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit // *Nature*. — 2023. — Vol. 614, no. 7949. — P. 676–681.
- [12] Krinner Sebastian, Lacroix Nathan et al. Realizing repeated quantum error correction in a distance-three surface code // *Nature*. — 2022. — Vol. 605, no. 7911. — P. 669–674.
- [13] Zhao Youwei, Ye Yangsen et al. Realization of an Error-Correcting Surface Code with Superconducting Qubits // *Phys. Rev. Lett.* — 2022. — Vol. 129. — P. 030501.
- [14] Paetznick A, da Silva MP et al. Demonstration of logical qubits and repeated error correction with better-than-physical error rates. — 2024. — arXiv:2404.02280.
- [15] Hong Yifan, Durso-Sabina Elijah et al. Entangling Four Logical Qubits beyond Break-Even in a Nonlocal Code // *Physical Review Letters*. — 2024. — Vol. 133, no. 18.
- [16] Google Quantum AI and Collaborators. Quantum error correction below the surface code threshold // *Nature*. — 2025. — Vol. 638. — P. 920–926.
- [17] Cirac J. I., Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 4091–4094.
- [18] Haffner H, Roos C, Blatt R. Quantum computing with trapped ions // *Physics Reports*. — 2008. — Vol. 469, no. 4. — P. 155–203.
- [19] Jaksch D., Zoller P. The cold atom Hubbard toolbox // *Annals of Physics*. — 2005. — Vol. 315, no. 1. — P. 52–79. — Special Issue.

- [20] Gross Christian, Bloch Immanuel. Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices // Science. — 2017. — Vol. 357, no. 6355. — P. 995–1001.
- [21] Kane Bruce E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // nature. — 1998. — Vol. 393, no. 6681. — P. 133–137.
- [22] Morello Andrea, Pla Jarryd J. others. Single-shot readout of an electron spin in silicon // Nature. — 2010. — Vol. 467, no. 7316. — P. 687–691.
- [23] Knill Emanuel, Laflamme Raymond, Milburn Gerald J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics // nature. — 2001. — Vol. 409, no. 6816. — P. 46–52.
- [24] Franson J. D., Donegan M. M. et al. High-Fidelity Quantum Logic Operations Using Linear Optical Elements // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89. — P. 137901.
- [25] Imamoglu A., Awschalom D. D. et al. Quantum Information Processing Using Quantum Dot Spins and Cavity QED // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 4204–4207.
- [26] Petta J. R., Johnson A. C. et al. Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots // Science. — 2005. — Vol. 309, no. 5744. — P. 2180–2184.
- [27] Devoret Michel H, Schoelkopf Robert J. Superconducting circuits for quantum information: an outlook // Science. — 2013. — Vol. 339, no. 6124. — P. 1169–1174.
- [28] Smith Bruce W., Suzuki Kazuaki. Microlithography Science and Technology. — 3th ed. — Boca Raton : CRC Press, 2020.
- [29] Krantz P., Kjaergaard M. et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits // Applied Physics Reviews. — 2019. — Vol. 6, no. 2.

- [30] Nakamura Yasunobu, Pashkin Yu A, Tsai JS. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box // *nature*. — 1999. — Vol. 398, no. 6730. — P. 786–788.
- [31] Wallraff Andreas, Schuster David I et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics // *Nature*. — 2004. — Vol. 431, no. 7005. — P. 162–167.
- [32] Blais Alexandre, Huang Ren-Shou et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation // *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 062320.
- [33] Koch Jens, Yu Terri M. et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box // *Phys. Rev. A*. — 2007. — Vol. 76. — P. 042319.
- [34] Chen Yu, Neill C et al. Qubit architecture with high coherence and fast tunable coupling // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 113, no. 22. — P. 220502.
- [35] Manucharyan Vladimir E., Koch Jens et al. Fluxonium: Single Cooper-Pair Circuit Free of Charge Offsets // *Science*. — 2009. — Vol. 326, no. 5949. — P. 113–116.
- [36] Hyppä Eric, Kundu Suman et al. Unimon qubit // *Nature Communications*. — 2022. — Vol. 13, no. 1.
- [37] Kalacheva Daria, Fedorov Gleb et al. Kinemon: An inductively shunted transmon artificial atom // *Phys. Rev. Appl.* — 2024. — Vol. 21. — P. 024058.
- [38] Swiadek François, Shillito Ross et al. Enhancing Dispersive Readout of Superconducting Qubits through Dynamic Control of the Dispersive Shift: Experiment and Theory // *PRX Quantum*. — 2024. — Vol. 5. — P. 040326.

- [39] Sunada Y., Kono S. et al. Fast Readout and Reset of a Superconducting Qubit Coupled to a Resonator with an Intrinsic Purcell Filter // Phys. Rev. Appl. — 2022. — Vol. 17. — P. 044016.
- [40] Wang Tenghui, Wu Feng et al. Efficient Initialization of Fluxonium Qubits based on Auxiliary Energy Levels // Phys. Rev. Lett. — 2024. — Vol. 132. — P. 230601.
- [41] Magnard P., Kurpiers P. et al. Fast and Unconditional All-Microwave Reset of a Superconducting Qubit // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121, no. 6.
- [42] Ding Jiayu, Li Yulong et al. Multipurpose architecture for fast reset and protective readout of superconducting qubits // Physical Review Applied. — 2025. — Vol. 23, no. 1.
- [43] Foxen B., Neill C. et al. Demonstrating a Continuous Set of Two-Qubit Gates for Near-Term Quantum Algorithms // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 125. — P. 120504.
- [44] Li Rui, Kubo Kentaro et al. Realization of High-Fidelity CZ Gate Based on a Double-Transmon Coupler // Phys. Rev. X. — 2024. — Vol. 14. — P. 041050.
- [45] Ding Leon, Hays Max et al. High-Fidelity, Frequency-Flexible Two-Qubit Fluxonium Gates with a Transmon Coupler // Phys. Rev. X. — 2023. — Vol. 13. — P. 031035.
- [46] Somoroff Aaron, Ficheux Quentin et al. Millisecond coherence in a superconducting qubit // Phys. Rev. Lett. — 2023. — Vol. 130. — P. 267001.
- [47] Wang Fei, Lu Kannan et al. High coherence fluxonium manufactured with a wafer-scale uniformity process. — 2024. — arXiv:2405.05481.

- [48] Rower David A., Ding Leon et al. Suppressing Counter-Rotating Errors for Fast Single-Qubit Gates with Fluxonium // PRX Quantum. — 2024. — Vol. 5. — P. 040342.
- [49] Lin Wei-Ju, Cho Hyunheung et al. 24 Days-Stable CNOT Gate on Fluxonium Qubits with Over 99.9PRX Quantum. — 2025. — Vol. 6. — P. 010349.
- [50] Nguyen Long B., Koolstra Gerwin et al. Blueprint for a High-Performance Fluxonium Quantum Processor // PRX Quantum. — 2022. — Vol. 3, no. 3.
- [51] Simakov Ilya A., Mazhorin Grigoriy S. et al. High-fidelity transmon-coupler-activated  $CCZ$  gate on fluxonium qubits // Phys. Rev. Appl. — 2024. — Vol. 21. — P. 044035.
- [52] Nielsen Michael A., Chuang Isaac L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. — 10th ed. — USA : Cambridge University Press, 2011. — ISBN: 1107002176.
- [53] Girvin S. M. Circuit QED: superconducting qubits coupled to microwave photons // Quantum Machines: Measurement and Control of Engineered Quantum Systems: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 96, July 2011. — Oxford University Press, 2014.
- [54] Blais Alexandre, Grimsmo Arne L et al. Circuit quantum electrodynamics // Reviews of Modern Physics. — 2021. — Vol. 93, no. 2. — P. 025005.
- [55] Kwon Sangil, Tomonaga Akiyoshi et al. Gate-based superconducting quantum computing // Journal of Applied Physics. — 2021. — Vol. 129, no. 4.
- [56] Vool Uri, Devoret Michel. Introduction to quantum electromagnetic circuits // International Journal of Circuit Theory and Applications. — 2017. — Vol. 45, no. 7. — P. 897–934.
- [57] Wendin Göran. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. — 2017. — Vol. 80, no. 10. — P. 106001.

- [58] Huang He-Liang, Wu Dachao et al. Superconducting quantum computing: a review // Science China Information Sciences. — 2020. — Vol. 63. — P. 1–32.
- [59] Kjaergaard Morten, Schwartz Mollie E et al. Superconducting qubits: Current state of play // Annual Review of Condensed Matter Physics. — 2020. — Vol. 11, no. 1. — P. 369–395.
- [60] Besedin Ilya. Circuit Design of Superconducting Quantum Circuits. — Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 2022.
- [61] Moskalenko Ilya. Quantum Electrodynamics of Superconducting Structures Based on Fluxonium Qubits. — National University of Science and Technology MISIS, 2022.
- [62] Fedorov Gleb. Modeling of Quantum Interaction Between Radiation and Matter Using Arrays of Superconducting Artificial Atoms. — Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 2021.
- [63] Gottesman Daniel. Stabilizer codes and quantum error correction. — California Institute of Technology, 1997.
- [64] Ketterer Andreas. Modular variables in quantum information : Ph.D. thesis ; Université Paris 7, Sorbonne Paris Cité. — 2016.
- [65] Hantzko Lukas, Binkowski Lennart, Gupta Sabhyata. Fast generation of Pauli transfer matrices utilizing tensor product structure // Physica Scripta. — 2025. — July. — Vol. 100, no. 7. — P. 075125.
- [66] Greenbaum Daniel. Introduction to Quantum Gate Set Tomography. — 2015. — arXiv:1509.02921.
- [67] Leggett A. J., Garg Anupam. Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 54. — P. 857–860.

- [68] Yan Fei, Krantz Philip et al. Tunable Coupling Scheme for Implementing High-Fidelity Two-Qubit Gates // *Phys. Rev. Appl.* — 2018. — Vol. 10. — P. 054062.
- [69] Roth Thomas E., Ma Ruichao, Chew Weng C. The Transmon Qubit for Electromagnetics Engineers: An introduction // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. — 2023. — Vol. 65, no. 2. — P. 8–20.
- [70] Stehlik J., Zajac D.M. et al. Tunable Coupling Architecture for Fixed-Frequency Transmon Superconducting Qubits // *Physical Review Letters*. — 2021. — Vol. 127, no. 8.
- [71] Boixo Sergio, Isakov Sergei V et al. Characterizing quantum supremacy in near-term devices // *Nature Physics*. — 2018. — Vol. 14, no. 6. — P. 595–600.
- [72] Wang C., Axline C. et al. Surface participation and dielectric loss in superconducting qubits // *Applied Physics Letters*. — 2015. — Vol. 107, no. 16. — P. 162601.
- [73] de Graaf S. E., Faoro L. et al. Two-level systems in superconducting quantum devices due to trapped quasiparticles // *Science Advances*. — 2020. — Vol. 6, no. 51. — P. eabc5055.
- [74] Somoroff Aaron, Ficheux Quentin et al. Millisecond Coherence in a Superconducting Qubit // *Phys. Rev. Lett.* — 2023. — Vol. 130. — P. 267001.
- [75] Moskalenko Il'ya Nikolaevich, Besedin Il'ya Stanislavovich et al. Planar architecture for studying a fluxonium qubit // *JETP Letters*. — 2019. — Vol. 110, no. 8. — P. 574–579.
- [76] Moskalenko Ilya N., Simakov Ilya A. et al. High fidelity two-qubit gates on fluxoniums using a tunable coupler // *npj Quantum Information*. — 2022. — Vol. 8, no. 1.



- [77] Fast Logic with Slow Qubits: Microwave-Activated Controlled-Z Gate on Low-Frequency Fluxoniums / Ficheux Quentin, Nguyen Long B., Somoroff Aaron, Xiong Haonan, et al. // Phys. Rev. X. — 2021. — Vol. 11. — P. 021026.
- [78] Bao Feng, Deng Hao et al. Fluxonium: An Alternative Qubit Platform for High-Fidelity Operations // Physical Review Letters. — 2022. — Vol. 129, no. 1.
- [79] Moskalenko I. N., Besedin I. S. et al. Tunable coupling scheme for implementing two-qubit gates on fluxonium qubits // Applied Physics Letters. — 2021. — Vol. 119, no. 19. — P. 194001.
- [80] Zhang Helin, Ding Chunyang et al. Tunable Inductive Coupler for High-Fidelity Gates Between Fluxonium Qubits // PRX Quantum. — 2024. — Vol. 5. — P. 020326.
- [81] Weiss D.K., Zhang Helin et al. Fast high-fidelity gates for galvanically-coupled fluxonium qubits using strong flux modulation // PRX Quantum. — 2022. — Vol. 3. — P. 040336.
- [82] Lin Wei-Ju, Cho Hyunheung et al. Verifying the analogy between transversely coupled spin-1/2 systems and inductively-coupled fluxoniums // New Journal of Physics. — 2025. — Vol. 27, no. 3. — P. 033012.
- [83] Nguyen Long B., Koolstra Gerwin et al. Blueprint for a High-Performance Fluxonium Quantum Processor // PRX Quantum. — 2022. — Vol. 3. — P. 037001.
- [84] Rosenfeld Emma L., Hann Connor T. et al. High-Fidelity Two-Qubit Gates between Fluxonium Qubits with a Resonator Coupler // PRX Quantum. — 2024. — Vol. 5. — P. 040317.
- [85] Schirk J., Wallner F. et al. Subharmonic Control of a Fluxonium Qubit

- via a Purcell-Protected Flux Line // PRX Quantum. — 2025. — Vol. 6. — P. 030315.
- [86] Wootters W., Zurek W. A single quantum cannot be cloned // Nature. — 1982. — Vol. 299, no. 5886. — P. 802–803.
- [87] Shor Peter W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52. — P. R2493–R2496.
- [88] Gottesman Daniel. Stabilizer Codes and Quantum Error Correction. — California Institute of Technology, Pasadena, California, 1997. — arXiv:9705052.
- [89] Ekert A., Macchiavello C. Error Correction in Quantum Communication. — 1996. — arXiv:9602022.
- [90] Laflamme Raymond, Miquel Cesar et al. Perfect quantum error correcting Code // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 198–201.
- [91] Kitaev A Yu. Quantum computations: algorithms and error correction // Russian Mathematical Surveys. — 1997. — Vol. 52, no. 6. — P. 1191.
- [92] Bravyi Sergey, Englbrecht Matthias et al. Correcting coherent errors with surface codes // npj Quantum Information. — 2017. — Vol. 4.
- [93] Kitaev A Yu. Fault-tolerant quantum computation by anyons // Annals of physics. — 2003. — Vol. 303, no. 1. — P. 2–30.
- [94] Fowler Austin G., Mariantoni Matteo et al. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation // Physical Review A. — 2012. — Vol. 86, no. 3.
- [95] Simakov Ilya A., Mazhorin Grigoriy S. et al. Coupler Microwave-Activated Controlled-Phase Gate on Fluxonium Qubits // PRX Quantum. — 2023. — Vol. 4. — P. 040321.

- [96] Mazhorin G. S., Kazmina A. S. et al. Scalable Quantum Processor Based on Superconducting Fluxonium Qubits // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2024. — P. 1–14.
- [97] Ficheux Quentin, Nguyen Long B et al. Fast logic with slow qubits: microwave-activated controlled-Z gate on low-frequency fluxoniums // Physical Review X. — 2021. — Vol. 11, no. 2. — P. 021026.
- [98] Ganzhorn M, Salis G et al. Benchmarking the noise sensitivity of different parametric two-qubit gates in a single superconducting quantum computing platform // Physical Review Research. — 2020. — Vol. 2, no. 3. — P. 033447.
- [99] Schuch Norbert, Siewert Jens. Natural two-qubit gate for quantum computation using the XY interaction // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — P. 032301.
- [100] Roth Marco, Ganzhorn Marc et al. Analysis of a parametrically driven exchange-type gate and a two-photon excitation gate between superconducting qubits // Phys. Rev. A. — 2017. — Vol. 96. — P. 062323.
- [101] Ganzhorn M., Salis G. et al. Benchmarking the noise sensitivity of different parametric two-qubit gates in a single superconducting quantum computing platform // Phys. Rev. Res. — 2020. — Vol. 2. — P. 033447.
- [102] Wei Ken Xuan, Lauer Isaac et al. Native Two-Qubit Gates in Fixed-Coupling, Fixed-Frequency Transmons Beyond Cross-Resonance Interaction // PRX Quantum. — 2024. — Vol. 5. — P. 020338.
- [103] Fowler Austin G., Mariantoni Matteo et al. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 032324.
- [104] Bombin H., Martin-Delgado M. A. Topological Quantum Distillation // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 180501.

- [105] Kovalev Alexey A., Dumer Ilya, Pryadko Leonid P. Design of additive quantum codes via the code-word-stabilized framework // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84. — P. 062319.
- [106] Xu Qian, Mannucci Nam et al. Tailored XZZX codes for biased noise // Phys. Rev. Res. — 2023. — Vol. 5. — P. 013035.
- [107] O'Brien Thomas E, Tarasinski B, DiCarlo Leo. Density-matrix simulation of small surface codes under current and projected experimental noise // npj Quantum Information. — 2017. — Vol. 3, no. 1. — P. 39.
- [108] Rol M. A., Bultink C. C. et al. Restless Tuneup of High-Fidelity Qubit Gates // Phys. Rev. Applied. — 2017. — Vol. 7. — P. 041001.
- [109] Bultink C. C., Rol M. A. et al. Active Resonator Reset in the Nonlinear Dispersive Regime of Circuit QED // Phys. Rev. Applied. — 2016. — Vol. 6. — P. 034008.
- [110] Quintana C. M., Chen Yu, Sank D. and others. Observation of Classical-Quantum Crossover of  $1/f$  Flux Noise and Its Paramagnetic Temperature Dependence // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118. — P. 057702.
- [111] Yan Fei, Gustavsson Simon et al. The flux qubit revisited to enhance coherence and reproducibility // Nature communications. — 2016. — Vol. 7, no. 1. — P. 1–9.
- [112] Ristè D., van Leeuwen J. G. et al. Initialization by Measurement of a Superconducting Quantum Bit Circuit // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 050507.
- [113] Dennis Eric, Kitaev Alexei et al. Topological quantum memory // Journal of Mathematical Physics. — 2002. — Vol. 43, no. 9. — P. 4452–4505.
- [114] Lin Yingjia, Huang Shilin, Brown Kenneth R. Single-shot error correction on toric codes with high-weight stabilizers // Phys. Rev. A. — 2024. — Vol. 109. — P. 052438.

- [115] Bonilla Ataides J Pablo, Tuckett David K et al. The XZZX surface code // Nature communications. — 2021. — Vol. 12, no. 1. — P. 2172.
- [116] Srivastava Basudha, Frisk Kockum Anton, Granath Mats. The XYZ<sup>2</sup> hexagonal stabilizer code // Quantum. — 2022. — Vol. 6. — P. 698.
- [117] Aaronson Scott, Gottesman Daniel. Improved simulation of stabilizer circuits // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70. — P. 052328.
- [118] Gidney Craig. Stim: a fast stabilizer circuit simulator // Quantum. — 2021. — Vol. 5. — P. 497.
- [119] Higgott Oscar, Bohdanowicz Thomas C. et al. Improved Decoding of Circuit Noise and Fragile Boundaries of Tailored Surface Codes // Phys. Rev. X. — 2023. — Vol. 13. — P. 031007.
- [120] Poulin David, Chung Yeojin. On the iterative decoding of sparse quantum codes. — 2008. — 0801.1241.
- [121] Krastanov Stefan, Jiang Liang. Deep neural network probabilistic decoder for stabilizer codes // Scientific reports. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 11003.
- [122] Torlai Giacomo, Melko Roger G. Neural Decoder for Topological Codes // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119. — P. 030501.
- [123] Breuckmann Nikolas P., Ni Xiaotong. Scalable Neural Network Decoders for Higher Dimensional Quantum Codes // Quantum. — 2018. — Vol. 2. — P. 68.
- [124] Chamberland Christopher, Ronagh Pooya. Deep neural decoders for near term fault-tolerant experiments // Quantum Science and Technology. — 2018. — Vol. 3, no. 4. — P. 044002.
- [125] Maskara Nishad, Kubica Aleksander, Jochym-O'Connor Tomas. Advantages of versatile neural-network decoding for topological codes // Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99. — P. 052351.

- [126] Overwater Ramon W. J., Babaie Masoud, Sebastiano Fabio. Neural-Network Decoders for Quantum Error Correction Using Surface Codes: A Space Exploration of the Hardware Cost-Performance Tradeoffs // IEEE Transactions on Quantum Engineering. — 2022. — Vol. 3. — P. 1–19.
- [127] Liu Ye-Hua, Poulin David. Neural Belief-Propagation Decoders for Quantum Error-Correcting Codes // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 122. — P. 200501.
- [128] Gicev Spiro, Hollenberg Lloyd C. L., Usman Muhammad. A scalable and fast artificial neural network syndrome decoder for surface codes // Quantum. — 2023. — Vol. 7. — P. 1058.
- [129] Hochreiter Sepp, Schmidhuber Jürgen. Long Short-Term Memory // Neural Computation. — 1997. — Vol. 9, no. 8. — P. 1735–1780.
- [130] Baireuther Paul, O’Brien Thomas E. et al. Machine-learning-assisted correction of correlated qubit errors in a topological code // Quantum. — 2018. — Vol. 2. — P. 48.
- [131] Baireuther P, Caio M D et al. Neural network decoder for topological color codes with circuit level noise // New Journal of Physics. — 2019. — Vol. 21, no. 1. — P. 013003.
- [132] Simakov I. A., Besedin I. S., Ustinov A. V. Simulation of the five-qubit quantum error correction code on superconducting qubits // Phys. Rev. A. — 2022. — Vol. 105. — P. 032409.
- [133] Simakov Ilya A., Besedin Ilya S. Low-overhead quantum error-correction codes with a cyclic topology // Phys. Rev. A. — 2025. — Vol. 111. — P. 012444.
- [134] Google Quantum AI and Collaborators. Demonstrating dynamic surface codes. — 2024. — arXiv:2412.14360.